BURHAN

Suites numériques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Application	8

Exercice 1

Les abonnés d'une application

Une application fictive compte u_n milliers d'abonnés le mois n, avec $u_n = \dfrac{5n+1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

Calculer u_0, u_1 et u_2.

INDICE

Outil : remplace n par sa valeur dans la formule.

CORRIGÉ

Calcul des termes. On remplace n par 0, puis par 1, puis par 2 dans la formule :

$$u_0 = \frac{5\times 0+1}{0+2} = \frac{1}{2},$$
$$u_1 = \frac{5\times 1+1}{1+2} = \frac{6}{3} = 2,$$
$$u_2 = \frac{5\times 2+1}{2+2} = \frac{11}{4}.$$

Conclusion. $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = 2$ et $u_2 = \dfrac{11}{4}$. Comme u_n compte des milliers d'abonnés, l'application passe de 500 à $2\,750$ abonnés en deux mois.

2.

Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{9}{(n+2)(n+3)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Début : $u_{n+1} = \dfrac{5n+6}{n+3}$; réduis la différence au dénominateur commun $(n+2)(n+3)$.

CORRIGÉ

Terme suivant. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remplace n par $n+1$ dans la formule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{5(n+1)+1}{(n+1)+2} \\ &= \frac{5n+6}{n+3}. \end{aligned}$$

Numérateur. Au dénominateur commun $(n+2)(n+3)$, le numérateur de $u_{n+1} - u_n$ est $(5n+6)(n+2) - (5n+1)(n+3)$. On développe chaque produit :

$$\begin{aligned} &(5n+6)(n+2) \\ &= 5n^2 + 16n + 12, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(5n+1)(n+3) \\ &= 5n^2 + 16n + 3. \end{aligned}$$

Différence. On en déduit le numérateur :

$$\begin{aligned} &\left(5n^2 + 16n + 12\right) \\ &\quad - \left(5n^2 + 16n + 3\right) \\ &= 9, \end{aligned}$$

puis :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{9}{(n+2)(n+3)}.$$

Signe. Le numérateur 9 et le dénominateur $(n+2)(n+3)$ sont strictement positifs, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{9}{(n+2)(n+3)} > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

3.

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - \dfrac{9}{n+2}$. En déduire que $\dfrac{1}{2} \leq u_n < 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : réduis $5 - \dfrac{9}{n+2}$ au même dénominateur. **Ensuite :** utilise la question 2 pour le minorant.

CORRIGÉ

Égalité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} 5 - \frac{9}{n+2} &= \frac{5(n+2) - 9}{n+2} \\ &= \frac{5n + 1}{n+2} \\ &= u_n. \end{aligned}$$

Majorant. Comme $n + 2 > 0$, on a $\dfrac{9}{n+2} > 0$. On retranche à 5 un nombre strictement positif, donc $u_n < 5$.

Minorant. D'après la question 2, la suite (u_n) est croissante. Son premier terme est donc le plus petit : $u_n \geq u_0 = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leq u_n < 5$. La suite est bornée : le nombre d'abonnés reste sous $5\,000$.

4.

On définit maintenant la suite (w_n) par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 0{,}5\, w_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer w_1 et w_2, puis montrer par récurrence que $1 \leq w_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : chaque terme se calcule à partir du précédent. **Ensuite :** pour l'hérédité, multiplie l'encadrement par $0{,}5$, puis ajoute 2.

CORRIGÉ

Termes. On applique la relation avec $n = 0$, puis avec $n = 1$:

$$w_1 = 0{,}5 \times 1 + 2 = 2{,}5,$$

$$w_2 = 0{,}5 \times 2{,}5 + 2 = 3{,}25.$$

Initialisation. $w_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 4$: l'encadrement est vrai pour $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq w_n \leq 4$. On multiplie par $0{,}5$, qui est positif, ce qui conserve le sens des inégalités :

$$0{,}5 \leq 0{,}5\, w_n \leq 2.$$

On ajoute 2 à chaque membre :

$$2{,}5 \leq w_{n+1} \leq 4.$$

Comme $1 \leq 2{,}5$, on obtient $1 \leq w_{n+1} \leq 4$.

Conclusion. $w_1 = 2{,}5$, $w_2 = 3{,}25$ et, par récurrence, $1 \leq w_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Une épargne qui progresse tous les mois

Youssef épargne pour un projet fictif. Le premier mois, il met de côté 200 dirhams. Ensuite, il met de côté 15 dirhams de plus que le mois précédent. On note u_n la somme mise de côté le mois numéro n, avec $u_1 = 200$.

1.

Justifier que (u_n) est arithmétique et préciser sa raison. Exprimer u_n en fonction de n.

INDICE

Outil : une suite est arithmétique quand on ajoute toujours le même nombre. **Point délicat :** le premier terme est u_1, pas u_0.

CORRIGÉ

Nature. Chaque mois, Youssef met de côté 15 dirhams de plus que le mois précédent : pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + 15$. La suite (u_n) est donc arithmétique de raison 15, de premier terme $u_1 = 200$.

Terme général. Le premier terme est u_1. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1) \times 15 \\ &= 200 + 15n - 15 \\ &= 185 + 15n. \end{aligned}$$

Conclusion. La suite (u_n) est arithmétique de raison 15 et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 185 + 15n$.

2.

Calculer la somme mise de côté le vingt-quatrième mois.

INDICE

Outil : la formule de la question 1 avec $n = 24$.

CORRIGÉ

On remplace n par 24 dans la formule de la question 1 :

$$\begin{aligned} u_{24} &= 185 + 15 \times 24 \\ &= 185 + 360 \\ &= 545. \end{aligned}$$

Conclusion. Le vingt-quatrième mois, Youssef met 545 dirhams de côté.

3.

Calculer le total épargné pendant les vingt-quatre premiers mois.

INDICE

Début : de u_1 à u_{24}, compte les termes. **Ensuite :** multiplie leur nombre par la moyenne du premier et du dernier terme.

CORRIGÉ

Nombre de termes. De u_1 à u_{24}, il y a $24 - 1 + 1 = 24$ termes.

Somme. La suite est arithmétique : la somme cherchée s'obtient en multipliant le nombre de termes par la demi-somme de u_1 et de u_{24} :

$$\begin{aligned} & u_1 + u_2 + \cdots + u_{24} \\ &= \frac{24 \times (200 + 545)}{2} \\ &= 12 \times 745 \\ &= 8\,940. \end{aligned}$$

Conclusion. Pendant les vingt-quatre premiers mois, Youssef a épargné $8\,940$ dirhams.

Exercice 3

Une chaîne de parrainage dans un club de lecture

Un club de lecture fictif lance une chaîne de parrainage. La première semaine, 5 personnes s'inscrivent. Ensuite, le nombre d'inscrits de la semaine double d'une semaine à la suivante. On note v_n le nombre d'inscrits pendant la semaine numéro n, avec $v_0 = 5$.

1.

Préciser la nature de (v_n) et exprimer v_n en fonction de n.

INDICE

Outil : une suite est géométrique quand on multiplie toujours par le même nombre.

CORRIGÉ

Nature. Le nombre d'inscrits double d'une semaine à la suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2\,v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2, de premier terme $v_0 = 5$.

Terme général. D'après le terme général d'une suite géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_n = v_0 \times 2^n = 5 \times 2^n$.

Conclusion. La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5 \times 2^n$.

2.

Combien de personnes s'inscrivent pendant la dixième semaine, c'est-à-dire la semaine numéro 9 ?

INDICE

Outil : la formule de la question 1 avec $n = 9$.

CORRIGÉ

On remplace n par 9 dans la formule de la question 1 :

$$\begin{aligned} v_9 &= 5 \times 2^9 \\ &= 5 \times 512 \\ &= 2\,560. \end{aligned}$$

Conclusion. Pendant la dixième semaine, $2\,560$ personnes s'inscrivent.

3.

Calculer le nombre total d'inscrits pendant les dix premières semaines.

INDICE

Début : les termes vont de v_0 à v_9. **Point délicat :** l'exposant de la formule est le nombre de termes, ici 10.

CORRIGÉ

Nombre de termes. Les dix premières semaines vont de v_0 à v_9 : il y a $9 - 0 + 1 = 10$ termes.

Somme. La raison 2 est différente de 1. La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est égale au premier terme multiplié par $\dfrac{1 - q^N}{1 - q}$, où N est le nombre de termes :

$$\begin{aligned} &v_0 + v_1 + \cdots + v_9 \\ &= 5 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \\ &= 5 \times \frac{-1\,023}{-1} \\ &= 5\,115. \end{aligned}$$

Conclusion. Pendant les dix premières semaines, le club compte $5\,115$ inscrits.

Exercice 4

Combien d'années pour doubler un capital ?

Leila place un capital fictif de $8\,000$ dirhams à intérêts composés, au taux annuel de 5 pour cent. On note C_n le capital, en dirhams, au bout de n années ; ainsi $C_0 = 8\,000$.

1.

Justifier que $C_{n+1} = 1{,}05\,C_n$, puis exprimer C_n en fonction de n.

INDICE

Outil : une hausse de 5 pour cent revient à multiplier par $1 + \dfrac{5}{100}$.

CORRIGÉ

Relation. Tous les ans, le capital gagne 5 pour cent de sa valeur. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + \frac{5}{100}\,C_n \\ &= (1 + 0{,}05)\,C_n \\ &= 1{,}05\,C_n. \end{aligned}$$

Nature. La suite (C_n) est donc géométrique de raison $1{,}05$, de premier terme $C_0 = 8\,000$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = 1{,}05\,C_n$ et $C_n = 8\,000 \times 1{,}05^{n}$.

2.

Calculer le capital au bout de 5 années, arrondi au centime.

INDICE

Outil : la calculatrice, avec la formule de la question 1.

CORRIGÉ

On remplace n par 5 dans la formule de la question 1, puis on utilise la calculatrice :

$$\begin{aligned} C_5 &= 8\,000 \times 1{,}05^{5} \\ &\approx 10\,210{,}25. \end{aligned}$$

Conclusion. Au bout de 5 années, le capital vaut environ $10\,210{,}25$ dirhams.

3.

À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal d'années pour que le capital atteigne au moins $16\,000$ dirhams.

INDICE

Début : fais un tableau de valeurs de C_n. **Point délicat :** contrôle le rang trouvé et le rang précédent.

CORRIGÉ

Sens de variation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n > 0$ et $C_{n+1} = 1{,}05\, C_n$. Comme $1{,}05 > 1$, on a $C_{n+1} > C_n$: la suite (C_n) est croissante.

Calculatrice. Un tableau de valeurs donne :

$$C_{14} \approx 15\,839{,}45,$$
$$C_{15} \approx 16\,631{,}43.$$

Donc $C_{14} < 16\,000 \leq C_{15}$. La suite étant croissante, $C_n < 16\,000$ pour $n \leq 14$ et $C_n \geq 16\,000$ pour $n \geq 15$.

Conclusion. Il faut au moins 15 années pour que le capital atteigne $16\,000$ dirhams, c'est-à-dire pour qu'il double.

4.

Avec des intérêts simples au même taux, le capital gagnerait 400 dirhams tous les ans. Combien d'années faudrait-il alors pour atteindre $16\,000$ dirhams ?

INDICE

Outil : des intérêts simples donnent une suite arithmétique $D_n = 8\,000 + 400\,n$.

CORRIGÉ

Suite arithmétique. Notons D_n le capital, en dirhams, au bout de n années. Il gagne 400 dirhams tous les ans, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = 8\,000 + 400\,n$.

Inéquation. Soit $n \in \mathbb{N}$. On résout $D_n \geq 16\,000$:

$$\begin{aligned} & 8\,000 + 400\,n \geq 16\,000 \\ \Leftrightarrow\ & 400\,n \geq 8\,000 \\ \Leftrightarrow\ & n \geq 20. \end{aligned}$$

Conclusion. Le capital atteint $16\,000$ dirhams dès que $n \geq 20$: il faudrait 20 années, soit 5 de plus qu'avec les intérêts composés.

Exercice 5

Quatre limites par les suites de référence

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = 3 + \dfrac{2}{n^2}$, $b_n = n^2 + \sqrt{n}$, $c_n = \dfrac{4n^2 - n}{2n^2 + 3}$ et $d_n = n^2 - 6n$.

1.

Déterminer la limite de (a_n) et celle de (b_n).

INDICE

Outil : les limites de $\dfrac{1}{n^2}$, de n^2 et de $\sqrt{n}$, puis la limite d'une somme.

CORRIGÉ

Suite (a_n). On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. Par produit par 2, la suite $\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$ a aussi pour limite 0 ; par somme avec 3, la suite (a_n) a pour limite 3.

Suite (b_n). Les suites $\left(n^2\right)$ et $(\sqrt{n})$ ont pour limite $+\infty$. Par somme, la suite (b_n) a pour limite $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

2.

Déterminer la limite de (c_n).

INDICE

Début : le quotient est une forme indéterminée ; divise le numérateur et le dénominateur par n^2.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. Le numérateur et le dénominateur ont pour limite $+\infty$: le quotient est une forme indéterminée.

Factorisation. Soit $n \geq 1$. On divise le numérateur et le dénominateur par n^2 :

$$c_n = \frac{4 - \dfrac{1}{n}}{2 + \dfrac{3}{n^2}}.$$

Limite. Les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{3}{n^2}\right)$ ont pour limite 0 : le numérateur tend vers 4 et le dénominateur vers 2, qui est non nul.

Conclusion. Par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{4}{2} = 2.$$

3.

Déterminer la limite de (d_n).

INDICE

Point délicat : n^2 et $6n$ ont tous deux pour limite $+\infty$; factorise par n avant de conclure.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. Les suites $\left(n^2\right)$ et $(6n)$ ont toutes deux pour limite $+\infty$: la différence est une forme indéterminée.

Factorisation. Pour tout $n \geq 1$, $d_n = n\,(n-6)$.

Conclusion. Les suites (n) et $(n-6)$ ont pour limite $+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$.

Exercice 6

Puissances d'un réel et valeur d'un stock

1.

Déterminer la limite de $(0{,}85^n)$ et celle de $(1{,}3^n)$.

INDICE

Outil : compare chaque raison à 1.

CORRIGÉ

Suite $(0{,}85^n)$. La raison vérifie $-1 < 0{,}85 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n = 0$.

Suite $(1{,}3^n)$. La raison vérifie $1{,}3 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}3^n = +\infty$.

Conclusion. La suite $(0{,}85^n)$ converge vers 0 et la suite $(1{,}3^n)$ a pour limite $+\infty$.

2.

Les suites $((-0{,}6)^n)$ et $((-1{,}2)^n)$ ont-elles une limite ?

INDICE

Point délicat : regarde la position de la raison par rapport à -1 et à 1.

CORRIGÉ

Suite $((-0{,}6)^n)$. Comme $-1 < -0{,}6 < 1$, la suite $((-0{,}6)^n)$ converge vers 0.

Suite $((-1{,}2)^n)$. Comme $-1{,}2 \leq -1$, cette suite n'a pas de limite : le signe de ses termes alterne, et leur distance à 0 augmente.

Conclusion. La première suite a pour limite 0 ; la seconde n'a pas de limite.

3.

La valeur d'un stock fictif, en milliers de dirhams, vaut $s_n = 7 - 4 \times 0{,}5^n$ le mois n. Déterminer la limite de (s_n) et l'interpréter.

INDICE

Outil : la limite de $(0{,}5^n)$, puis les opérations.

CORRIGÉ

Limite de la puissance. Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$.

Limite de (s_n). Par produit, la suite $(4 \times 0{,}5^n)$ a pour limite 0. Par différence :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = 7.$$

Conclusion. La suite (s_n) converge vers 7. Comme s_n est exprimé en milliers de dirhams, la valeur du stock se rapproche, à long terme, de $7\,000$ dirhams.

Exercice 7

Le prix moyen d'un article

Une entreprise fictive estime le prix moyen d'un article, en centaines de dirhams, au mois n par $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+1}$, de sorte que $u_n = f(n)$.

1.

Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Outil : la dérivée d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ est $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$, dont le dénominateur $x+1$ ne s'annule pas. Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1) - (2x+5)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-3}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Signe. Pour tout $x \geq 0$, $(x+1)^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Conclusion. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les réels n et $n+1$ sont dans $[0;+\infty[$ et $n < n+1$, donc $f(n+1) < f(n)$, soit $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est décroissante.

2.

Déterminer la limite de (u_n).

INDICE

Début : cherche la limite de f en $+\infty$ en factorisant par x.

CORRIGÉ

Limite de f. Pour $x > 0$, on divise le numérateur et le dénominateur par x :

$$f(x) = \frac{2 + \dfrac{5}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}}.$$

En $+\infty$, $\dfrac{5}{x}$ et $\dfrac{1}{x}$ ont pour limite 0. Par quotient, f a pour limite 2 en $+\infty$.

Limite de la suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, donc la suite (u_n) a la même limite que f en $+\infty$.

Conclusion. La suite (u_n) converge vers 2 : le prix moyen se rapproche de 200 dirhams.

3.

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 = \dfrac{3}{n+1}$. En déduire que $2 < u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur. **Ensuite :** utilise la question 1 pour le majorant.

CORRIGÉ

Écart. Soit $n \in \mathbb{N}$. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n - 2 &= \frac{2n + 5 - 2(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{2n + 5 - 2n - 2}{n+1} \\ &= \frac{3}{n+1}. \end{aligned}$$

Minorant. Comme $n + 1 > 0$, on a $\dfrac{3}{n+1} > 0$, donc $u_n > 2$.

Majorant. D'après la question 1, la suite est décroissante. Son premier terme est donc le plus grand : $u_n \leq u_0 = 5$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < u_n \leq 5$.

Exercice 8

Une suite non monotone et sa limite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n+1}$.

1.

Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3. La suite est-elle monotone ?

INDICE

Outil : $(-1)^n$ vaut 1 pour n pair et -1 pour n impair.

CORRIGÉ

Termes. On utilise que $(-1)^n$ vaut 1 pour n pair et -1 pour n impair :

$$u_0 = \frac{0+1}{0+1} = 1,$$
$$u_1 = \frac{3-1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1,$$
$$u_2 = \frac{6+1}{2+1} = \frac{7}{3},$$
$$u_3 = \frac{9-1}{3+1} = \frac{8}{4} = 2.$$

Comparaison. On a $u_2 > u_1$, donc la suite n'est pas décroissante. On a $u_3 < u_2$, donc elle n'est pas croissante.

Conclusion. $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = \dfrac{7}{3}$ et $u_3 = 2$; la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante : elle n'est pas monotone.

2.

Montrer que $\dfrac{3n-1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{3n+1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Début : pars de $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. **Point délicat :** le diviseur $n+1$ est strictement positif.

CORRIGÉ

Numérateur. Soit $n \in \mathbb{N}$. On part de $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et on ajoute $3n$:

$$\begin{aligned} 3n - 1 &\leq 3n + (-1)^n \\ &\leq 3n + 1. \end{aligned}$$

Division. On divise par $n+1$, qui est strictement positif, ce qui conserve le sens des inégalités :

$$\frac{3n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{n+1}.$$

Conclusion. L'encadrement demandé est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.

En déduire la limite de (u_n).

INDICE

Outil : calcule la limite de chaque borne, puis cite le théorème d'encadrement.

CORRIGÉ

Limites des bornes. Soit $n \geq 1$. On divise le numérateur et le dénominateur par n :

$$\frac{3n-1}{n+1} = \frac{3-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}},$$

$$\frac{3n+1}{n+1} = \frac{3+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}.$$

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ a pour limite 0. Par quotient, les deux bornes convergent vers $\dfrac{3}{1} = 3$.

Encadrement. D'après la question 2, (u_n) est encadrée par deux suites qui convergent vers la même limite 3.

Conclusion. D'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge vers 3.