BURHAN

Suites numériques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/cours

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

Un capital qui grandit

Salma, une élève fictive, place $10\,000$ dirhams à la banque. Toutes les données de ce chapitre sont fictives.

Le placement rapporte des intérêts composés au taux de 6 pour cent par an : tous les ans, le capital est multiplié par $1{,}06$.

Prends ta calculatrice. Après un an, Salma a $10\,600$ dirhams ; après deux ans, $11\,236$ dirhams.

Devine : Une prédiction

Au bout de combien d'années le capital de Salma dépasse-t-il pour la première fois $20\,000$ dirhams, le double de la somme placée ?

A. Au bout de 6 ans.

Faux.

Après 6 ans, la calculatrice donne environ $14\,185$ dirhams : on est loin du double.

B. Au bout de 17 ans.

Faux.

Ce calcul ajoute 600 dirhams tous les ans. Il oublie que les intérêts produisent eux-mêmes des intérêts.

C. Au bout de 12 ans.

Juste.

Juste : après 11 ans, le capital vaut environ $18\,983$ dirhams ; après 12 ans, environ $20\,122$ dirhams.

D. Jamais : le capital grandit trop lentement.

Faux.

Le coefficient $1{,}06$ est plus grand que 1 : les capitaux finissent par dépasser tout nombre fixé.

Correction

On multiplie le capital par $1{,}06$ tous les ans, à la calculatrice.

Après 11 ans, le capital vaut $10\,000 \times 1{,}06^{11}$, soit environ $18\,983$ dirhams : le double n'est pas encore atteint.

Après 12 ans, il vaut $10\,000 \times 1{,}06^{12}$, soit environ $20\,122$ dirhams. Le capital double donc en 12 ans.

> Avec des intérêts simples de 600 dirhams par an, il faudrait 17 ans.

Les capitaux de Salma forment une **suite** de nombres : $10\,000$, $10\,600$, $11\,236$, et ainsi de suite.

Dans ce chapitre, tu reprends les suites de 1BAC, puis tu étudies leur comportement à long terme : leur **limite**.

Tu étudies aussi des suites où l'on multiplie puis ajoute, comme un stock ou un club d'abonnés. Enfin, tu cherches des seuils à la calculatrice.

Suites : définition, bornes, monotonie

Deux façons de fabriquer une suite

Devine : Deux règles de calcul

Deux boutiques fictives comptent leurs clients fidèles. Pour la première, le mois n, il y en a $a_n = 40 + 5n$. Pour la seconde, $b_0 = 40$ et $b_{n+1} = 2\,b_n - 30$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Combien vaut b_3 ?

A. $b_3 = 70$

Faux.

C'est b_2 : tu t'es arrêté un rang trop tôt. Depuis b_0, il faut trois calculs.

B. $b_3 = 55$

Faux.

C'est $a_3 = 40 + 15$: ce terme appartient à la première suite.

C. $b_3 = 290$

Faux.

Tu as multiplié 40 par $2^3 = 8$, puis retiré 30 une seule fois. Or on retire 30 à chaque rang.

D. $b_3 = 110$

Juste.

Juste : $b_1 = 50$, $b_2 = 70$, puis $b_3 = 110$.

Correction

La seconde suite se calcule de proche en proche, chaque terme à partir du précédent :

$$b_1 = 2 \times 40 - 30 = 50,$$
$$b_2 = 2 \times 50 - 30 = 70,$$
$$b_3 = 2 \times 70 - 30 = 110.$$

La première suite donne directement un terme à partir de son rang : $a_3 = 40 + 5 \times 3 = 55$.

Définition : Suite numérique

Une **suite numérique** (u_n) associe à chaque entier naturel n (éventuellement à partir d'un rang n_0) un réel noté u_n, appelé **terme de rang** n ou **terme général** de la suite.

Une suite peut être définie :

- **explicitement**, par une formule $u_n = f(n)$ qui donne directement chaque terme à partir de son rang ;
- **par récurrence**, par son premier terme et une relation qui donne chaque terme à partir du précédent, par exemple $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : explicite ou par récurrence

Rappel de 1BAC : une suite se définit par une formule en n ou à partir du terme précédent.

- La suite (a_n) est définie **explicitement**. Pour obtenir a_{20}, on remplace n par 20 : $a_{20} = 40 + 100 = 140$.
- La suite (b_n) est définie **par récurrence**. Pour obtenir b_{20}, il faut d'abord calculer b_1, b_2, et ainsi de suite jusqu'à b_{19}. La calculatrice le fait vite, en mode suite.

Majorée, minorée, bornée

En clair. Un entrepôt fictif ne peut pas contenir plus de 500 cartons, et un stock n'est jamais négatif.

Si s_n est le stock le jour n, on a donc $0 \leq s_n \leq 500$ pour tout entier naturel n. On dit que la suite est **bornée** : 500 est un majorant, 0 un minorant.

Définition : Suite majorée, minorée, bornée

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; le réel M est **un majorant** de la suite.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; le réel m est **un minorant** de la suite.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple : une suite bornée

Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{3n}{n+1}$.

Minorant. Le numérateur est positif ou nul et le dénominateur strictement positif, donc $w_n \geq 0$: la suite est minorée par 0.

Majorant. On a $3n < 3n + 3 = 3(n + 1)$. On divise par $n + 1 > 0$: $w_n < 3$. La suite est majorée par 3.

Conclusion. La suite est bornée. Le réel 10 est aussi un majorant : un majorant n'est pas unique.

Croissante ou décroissante

Définition : Suite monotone

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**. Étudier la monotonie d'une suite revient à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Vérifie : Lire un signe

Pour $u_n = n^2 - 3n$, un calcul donne $u_{n+1} - u_n = 2n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peux-tu affirmer ?

A. Elle est croissante à partir du rang 1, mais pas monotone sur $\mathbb{N}$.
Juste.
Juste : la différence vaut -2 pour $n = 0$, puis elle est positive ou nulle dès $n = 1$.

B. Elle est croissante sur tout $\mathbb{N}$, car $2n - 2$ grandit avec n.
Faux.
Pour $n = 0$, la différence vaut -2 : $u_1 = -2$ est plus petit que $u_0 = 0$.

C. Elle est décroissante sur $\mathbb{N}$, car le premier écart vaut -2.
Faux.
Un seul écart ne suffit pas : pour $n = 3$, la différence vaut 4.

D. Elle est constante, car $u_2 - u_1 = 0$.
Faux.
Un écart nul ne rend pas la suite constante : $u_4 - u_3 = 4$.

Correction
On étudie le signe de $2n - 2$ selon la valeur de n.

- Pour $n = 0$, il vaut -2 : $u_1 < u_0$.
- Pour $n \geq 1$, on a $2n - 2 \geq 0$: $u_{n+1} \geq u_n$.

> Les termes valent $0, -2, -2, 0, 4$: la suite descend, puis monte. Elle est croissante à partir du rang 1, mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

Étudier la monotonie

Méthode : étudier la monotonie d'une suite

1. **Calcule** la différence $u_{n+1} - u_n$ et simplifie-la : même dénominateur, factorisation.
2. **Étudie son signe** pour tout $n \in \mathbb{N}$. Positive, la suite est croissante ; négative, elle est décroissante.
3. **Autres voies.** Si tous les termes sont strictement positifs, compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Si $u_n = f(n)$, étudie les variations de f.
4. **Conclus** en nommant le critère employé.

Exemple : une différence à réduire

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

Différence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3}.$$

Au dénominateur commun $(n+3)(n+4)$, le numérateur vaut :

$$(2n^2 + 9n + 9) - (2n^2 + 9n + 4) = 5.$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+3)(n+4)}.$$

Conclusion. Le numérateur 5 et le dénominateur sont strictement positifs. D'après le signe de la différence, (u_n) est strictement croissante.

Démontrer par récurrence

Méthode : démontrer un encadrement par récurrence

1. **Énonce** la propriété $P(n)$, par exemple « $0 \leq u_n \leq 2$ ».
2. **Initialisation** : vérifie $P(0)$.

3. **Hérédité** : suppose $P(n)$ vraie pour un entier n fixé. Déduis-en $P(n+1)$, avec les règles de l'ordre ou les variations de f.
4. **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : un encadrement par récurrence

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrons que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** : $u_0 = 0$, et $0 \leq 0 \leq 2$.
- **Hérédité** : soit n un entier naturel tel que $0 \leq u_n \leq 2$. Alors $2 \leq u_n + 2 \leq 4$. La racine carrée conserve l'ordre des réels positifs, donc $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. Comme $0 \leq \sqrt{2}$, on obtient $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.
- **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

Un piège, puis à toi

Attention : quelques termes ne suffisent pas

✗ « $u_0 > u_1 > u_2$, donc la suite est décroissante. »

✓ La monotonie se démontre **pour tout** n. Avec $u_n = (n-3)^2$, on a bien $9 > 4 > 1$. Mais $u_3 = 0$ et $u_4 = 1$: la suite remonte. Quelques termes servent à conjecturer, jamais à conclure.

À toi : Monotonie et majorant

Soit $u_n = \dfrac{n}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudie la monotonie de (u_n), puis montre qu'elle est majorée par 1. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $u_{n+1} - u_n$, puis $1 - u_n$, en réduisant au même dénominateur.

Indice 2

Tu dois trouver $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{(n+2)(n+3)}$.

Indice 3

Point délicat : conclus avec le signe du dénominateur, strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponse

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

En effet, au même dénominateur, le numérateur vaut $(n+1)(n+2) - n(n+3) = n^2 + 3n + 2 - n^2 - 3n = 2$.

Cette différence est strictement positive : (u_n) est strictement croissante.

Majorant. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 1 - u_n &= \frac{n+2-n}{n+2} \\ &= \frac{2}{n+2}. \end{aligned}$$

Ce nombre est strictement positif, donc $u_n < 1$: la suite est majorée par 1.

Suites arithmétiques et géométriques

Ajouter toujours la même quantité

Devine : Des abonnés en plus

Une salle de sport fictive compte 150 abonnés au mois 0. Elle en gagne 12 de plus tous les mois. Combien d'abonnés compte-t-elle au mois 10 ?

A. 282 abonnés

Faux.

Tu as ajouté 12 onze fois. Du mois 0 au mois 10, il y a dix ajouts.

B. 270 abonnés

Juste.

Juste : $150 + 10 \times 12 = 270$.

C. $1\,500$ abonnés

Faux.

Tu as multiplié 150 par 10. Or on ajoute 12 tous les mois : on ne multiplie pas.

D. 258 abonnés

Faux.

Tu as ajouté 12 neuf fois seulement : il manque un mois.

Correction

Tous les mois, on ajoute 12 : la suite est arithmétique de raison 12.

Du mois 0 au mois 10, on ajoute 12 dix fois. Au mois 10, le nombre d'abonnés vaut donc :

$$150 + 10 \times 12 = 270.$$

Définition : Suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est la **raison** de la suite : la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs est constante, égale à r.

Exemple : reconnaître une suite arithmétique

Rappel de 1BAC : une suite est arithmétique quand la différence de deux termes consécutifs est constante.

Une suite arithmétique. Soit $u_n = 7 - 2n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n \\ &= 7 - 2(n+1) - (7 - 2n) \\ &= -2. \end{aligned}$$

La différence est constante : (u_n) est arithmétique de raison -2.

Une suite qui ne l'est pas. Soit $v_n = n^2$. On a $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$. La différence n'est pas constante : (v_n) n'est pas arithmétique.

Terme général et somme

Propriété : Suite arithmétique : terme général et somme

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Pour tous entiers naturels n et p : $u_n = u_p + (n-p)\,r$; en particulier $u_n = u_0 + n\,r$.
- Pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$, la somme des termes consécutifs de u_p à u_n vaut

  $$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(n-p+1)\,(u_p + u_n)}{2},$$

  c'est-à-dire le nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier terme.

Démonstration

Idée de la preuve. Terme général : d'un rang au suivant, on ajoute la raison r ; pour aller de u_p à u_n, on l'ajoute $n-p$ fois. Une récurrence rend ce comptage rigoureux ; elle n'est pas rédigée ici. Somme : on écrit la somme S deux fois, une fois dans l'ordre croissant des rangs et une fois dans

l'ordre décroissant, puis on additionne terme à terme. D'après le terme général, chacune des $n-p+1$ colonnes vaut u_p+u_n ; ce calcul n'est pas détaillé. On obtient $2S=(n-p+1)(u_p+u_n)$.

Exemple : une somme de termes consécutifs

Karim, un élève fictif, met 5 dirhams de côté la semaine 0, puis 3 dirhams de plus d'une semaine à l'autre. La semaine n, il met donc $u_n=5+3n$ dirhams. Combien a-t-il épargné des semaines 0 à 20 ?

La suite (u_n) est arithmétique de raison 3. Le dernier terme vaut $u_{20}=5+60=65$. De u_0 à u_{20}, il y a $20-0+1=21$ termes.

D'après la formule de la somme, la somme épargnée vaut :

$$\frac{21\times(5+65)}{2}=735.$$

Karim a épargné 735 dirhams.

Multiplier toujours par le même nombre

Devine : Une population qui grandit

Une ville fictive compte $8\,000$ habitants. Sa population augmente de 5 pour cent par an. Comment passe-t-on d'une année à la suivante ?

A. On ajoute 5 habitants.
Faux.
Une hausse de 5 pour cent porte sur la population entière, pas sur un nombre fixe de 5 habitants.

B. On ajoute 400 habitants.
Faux.
C'est vrai la première année seulement. L'année suivante, 5 pour cent de $8\,400$ font 420.

C. On multiplie par $0{,}05$.
Faux.
Multiplier par $0{,}05$ donne seulement l'augmentation, pas la nouvelle population.

D. On multiplie par $1{,}05$.
Juste.
Juste : on garde la population, et on lui ajoute 5 pour cent d'elle-même.

Correction
Une hausse de 5 pour cent revient à ajouter à la population P le nombre $0{,}05\,P$:

$$P+0{,}05\,P=1{,}05\,P.$$

> On multiplie donc par $1{,}05$: $P_1 = 8\,000 \times 1{,}05 = 8\,400$, puis $P_2 = 8\,400 \times 1{,}05 = 8\,820$.
>
> L'augmentation passe de 400 à 420 habitants : elle n'est pas constante.

Définition : Suite géométrique

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q\,u_n.$$

Le réel q est la **raison** de la suite. Lorsque aucun terme n'est nul, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ de deux termes consécutifs est constant, égal à q.

Exemple : reconnaître une suite géométrique

La population. La population fictive vérifie $P_{n+1} = 1{,}05\,P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (P_n) est géométrique de raison $1{,}05$.

Une formule explicite. Soit $u_n = 3 \times 2^n$. Aucun terme n'est nul, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = 2.$$

La suite (u_n) est géométrique de raison 2.

Terme général et somme géométrique

Propriété : Suite géométrique : terme général et somme

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- Pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$: $u_n = u_p\,q^{n-p}$; en particulier $u_n = u_0\,q^n$.
- Si $q \neq 1$, pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

- Si $q = 1$, la suite est constante et cette somme vaut $(n - p + 1)\,u_p$.

Démonstration

Idée de la preuve. Terme général : d'un rang au suivant, on multiplie par q ; pour aller de u_p à u_n, on multiplie $n - p$ fois. La récurrence qui le justifie n'est pas rédigée ici. Somme : on note S la somme. Le produit $q\,S$ contient les mêmes termes décalés d'un rang, de u_{p+1} à u_{n+1}. Dans la différence $S - q\,S$, tous les termes se compensent sauf u_p et u_{n+1} ; ce décompte n'est pas détaillé. On obtient $(1 - q)\,S = u_p - u_{n+1} = u_p\,(1 - q^{n-p+1})$, puis on divise par $1 - q$, qui n'est pas nul.

Exemple : une somme géométrique

Avec $u_n = 3 \times 2^n$, calculons $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$.

La raison vaut $q = 2$, différente de 1, et le premier terme vaut $u_0 = 3$. De u_0 à u_5, il y a 6 termes. D'après la formule de la somme :

$$\begin{aligned} S &= 3 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} \\ &= 3 \times 63 \\ &= 189. \end{aligned}$$

Contrôle à la calculatrice : $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : reconnaître une suite et calculer une somme

1. **Reconnais** la suite : $u_{n+1} - u_n$ constant (arithmétique), ou $u_{n+1} = q\,u_n$ avec q constant (géométrique).
2. **Écris** le terme général à partir du premier terme connu.
3. **Compte** les termes : de u_p à u_n, il y en a $n - p + 1$.
4. **Applique** la formule de la somme, puis simplifie.

Attention : compter les termes

✗ « De u_4 à u_{15}, il y a $15 - 4 = 11$ termes. »

✓ Il y a $15 - 4 + 1 = 12$ termes. Vérifie sur un cas simple : de u_1 à u_3, il y a bien trois termes, u_1, u_2 et u_3, et non $3 - 1 = 2$.

À toi : Une somme arithmétique

Soit $u_n = 7 + 4n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calcule $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{12}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La suite est arithmétique : utilise la formule de la somme de termes consécutifs.
Indice 2
Calcule le premier terme u_3 et le dernier terme u_{12}.
Indice 3
Point délicat : de u_3 à u_{12}, compte bien les termes, sans oublier le $+1$.

Réponse

Nature. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 4$: la suite est arithmétique de raison 4.

Termes utiles. On a $u_3 = 19$ et $u_{12} = 55$. De u_3 à u_{12}, il y a $12 - 3 + 1 = 10$ termes.

Somme. D'après la formule de la somme :

$$\begin{aligned} S &= \frac{10 \times (19 + 55)}{2} \\ &= 370. \end{aligned}$$

Intérêts, capital, évolutions

Deux façons de placer un capital

Rappel de 1BAC : avec des **intérêts simples** au taux de t pour cent, les intérêts sont calculés sur le capital de départ. Le capital forme une suite arithmétique.

Avec des **intérêts composés**, les intérêts s'ajoutent au capital et rapportent à leur tour. Le capital est multiplié par $1 + \dfrac{t}{100}$ tous les ans : la suite est géométrique.

Devine : Deux placements

Un capital fictif de $5\,000$ dirhams est placé pendant deux ans au taux de 4 pour cent par an. Le placement A verse des intérêts simples, le placement B des intérêts composés. Lequel donne le plus grand capital au bout de deux ans ?

A. Le placement A.

Faux.

A donne $5\,000 + 2 \times 200 = 5\,400$ dirhams, un peu moins que B.

B. Le placement B.

Juste.

Juste : B donne $5\,000 \times 1{,}04^2 = 5\,408$ dirhams.

C. Ils donnent le même capital.

Faux.

La première année, oui. La seconde, B verse aussi des intérêts sur les 200 dirhams d'intérêts.

D. On ne peut pas savoir sans la banque.

Faux.

Le taux et la durée suffisent : on calcule les deux capitaux.

Correction

Placement A. Tous les ans, on ajoute $5\,000 \times 0{,}04 = 200$ dirhams : on obtient $5\,400$ dirhams.

Placement B. Tous les ans, on multiplie par $1{,}04$:

$$5\,000 \times 1{,}04^2 = 5\,408.$$

> On obtient $5\,408$ dirhams.
>
> **Écart.** La différence de 8 dirhams vient des intérêts de la seconde année sur les 200 dirhams d'intérêts : $200 \times 0{,}04 = 8$.

Exemple : des intérêts simples

Un capital fictif de $3\,000$ dirhams est placé à intérêts simples au taux de 5 pour cent par an.

- Les intérêts annuels valent $3\,000 \times 0{,}05 = 150$ dirhams.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = C_n + 150$: la suite (C_n) est arithmétique de raison 150, et $C_n = 3\,000 + 150\,n$.
- Au bout de 8 ans, $C_8 = 3\,000 + 1\,200 = 4\,200$ dirhams.

Exemple : des intérêts composés

Le même capital est placé à intérêts composés au taux de 5 pour cent par an.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = C_n + 0{,}05\,C_n = 1{,}05\,C_n$: la suite (C_n) est géométrique de raison $1{,}05$.
- Son premier terme vaut $C_0 = 3\,000$, donc $C_n = 3\,000 \times 1{,}05^n$.
- Au bout de 8 ans, la calculatrice donne $C_8 = 3\,000 \times 1{,}05^8$, soit $4\,432{,}37$ dirhams arrondis au centime.

Pourcentages et seuils

Attention : des pourcentages successifs

✗ « Un prix baisse de 20 pour cent, puis augmente de 20 pour cent : il revient à sa valeur de départ. »

✓ On multiplie par $0{,}8$, puis par $1{,}2$: $0{,}8 \times 1{,}2 = 0{,}96$. Le prix final a baissé de 4 pour cent. Une évolution en pourcentage se traduit par une **multiplication**, jamais par un ajout.

Méthode : traduire une situation et chercher un seuil

1. **Nomme** la grandeur étudiée l'année n, par exemple C_n, et fixe l'année de départ $n = 0$.
2. **Traduis** le passage d'une année à la suivante : ajout d'une même somme (suite arithmétique) ou multiplication par un même coefficient (suite géométrique).
3. **Exprime** le terme général, puis réponds à la question posée.

4. **Cherche le seuil** à la calculatrice ou dans un tableau de valeurs. Donne le rang trouvé et la valeur au rang précédent.

Exemple : un seuil à la calculatrice

On reprend $C_n = 3\,000 \times 1{,}05^n$. À partir de quelle année le capital dépasse-t-il $4\,500$ dirhams ?

- La suite est croissante, car $1{,}05 > 1$ et $C_0 > 0$.
- Le tableau de valeurs de la calculatrice donne C_8 environ $4\,432{,}37$ et C_9 environ $4\,653{,}98$.
- Comme $C_8 < 4\,500 \leq C_9$, le capital dépasse $4\,500$ dirhams à partir de $n = 9$.

Vérifie : Taux plus grand, capital plus grand ?

Un capital fictif de $4\,000$ dirhams est placé pendant 10 ans. Placement A : intérêts simples à 6 pour cent par an. Placement B : intérêts composés à 5 pour cent par an. Lequel donne le plus grand capital au bout de 10 ans ?

A. Le placement A, car son taux est plus grand.
Faux.
A donne $4\,000 + 10 \times 240 = 6\,400$ dirhams, moins que B.

B. Les deux donnent le même capital.
Faux.
Les calculs donnent $6\,400$ dirhams pour A et environ $6\,515{,}58$ dirhams pour B.

C. On ne compare pas des taux différents.
Faux.
On peut toujours comparer les deux capitaux obtenus.

D. Le placement B, malgré son taux plus petit.
Juste.
Juste : B donne $4\,000 \times 1{,}05^{10}$, soit environ $6\,515{,}58$ dirhams.

Correction
Placement A. Tous les ans, on ajoute $4\,000 \times 0{,}06 = 240$ dirhams. Au bout de 10 ans : $4\,000 + 10 \times 240 = 6\,400$ dirhams.

Placement B. On multiplie par $1{,}05$ tous les ans. Au bout de 10 ans : $4\,000 \times 1{,}05^{10}$, soit environ $6\,515{,}58$ dirhams.

Bilan. Sur une longue durée, les intérêts composés l'emportent, même avec un taux plus petit. Sur 5 ans, en revanche, A donne $5\,200$ dirhams et B environ $5\,105{,}13$ dirhams.

Une population, puis à toi

Exemple : une population qui diminue

Un village fictif compte $25\,000$ habitants pour $n = 0$. Sa population baisse de 2 pour cent par an.

- Tous les ans, on multiplie par $1 - 0{,}02 = 0{,}98$: $P_n = 25\,000 \times 0{,}98^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Au bout de 5 ans, P_5 vaut environ $22\,598$ habitants.
- La suite est décroissante. Le tableau de valeurs donne P_{11} environ $20\,018$ et P_{12} environ $19\,618$: la population passe sous $20\,000$ habitants pour $n = 12$.

À toi : Un placement et un seuil

Un capital fictif de $2\,000$ dirhams est placé à intérêts composés au taux de 3 pour cent par an. Exprime C_n en fonction de n, puis calcule C_4 au centime. Cherche enfin à la calculatrice le premier entier n tel que $C_n \geq 2\,400$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Tous les ans, le capital est multiplié par le même coefficient : la suite est géométrique.
Indice 2
Le coefficient vaut $1{,}03$, donc $C_n = 2\,000 \times 1{,}03^n$.
Indice 3
Point délicat : pour le seuil, donne le rang trouvé et vérifie que le rang précédent ne convient pas.

Réponse
Terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = 1{,}03\,C_n$: la suite est géométrique de raison $1{,}03$ et de premier terme $C_0 = 2\,000$. Donc $C_n = 2\,000 \times 1{,}03^n$.

Valeur au bout de quatre ans. $C_4 = 2\,000 \times 1{,}03^4$, soit $2\,251{,}02$ dirhams au centime.

Seuil. La suite est croissante. La calculatrice donne C_6 environ $2\,388{,}10$ et C_7 environ $2\,459{,}75$. Le premier entier cherché est $n = 7$.

Remarque : Coin examen : rédiger la recherche d'un seuil

À l'examen, la recherche d'un seuil se rédige en trois temps : la nature de la suite, son terme général, puis le tableau de valeurs. Par exemple : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = 1{,}02\,C_n$, donc (C_n) est géométrique de raison $1{,}02$ et de premier terme $C_0 = 6\,000$. Donc $C_n = 6\,000 \times 1{,}02^n$. La suite est croissante. À la calculatrice, C_7 vaut environ $6\,892{,}11$, donc $C_7 < 7\,000$. Et C_8 vaut environ $7\,029{,}96$, donc $C_8 \geq 7\,000$. Le plus petit entier cherché est $n = 8$. »

Limite d'une suite

Où vont les termes

Devine : Une suite qui se stabilise

Le prix fictif d'un téléphone, en centaines de dirhams, n mois après sa sortie, vaut $u_n = 2 + \dfrac{6}{n+1}$. La calculatrice donne $u_0 = 8$, $u_5 = 3$, $u_{11} = 2{,}5$, $u_{59} = 2{,}1$ et $u_{599} = 2{,}01$. Vers quelle valeur les termes semblent-ils se rapprocher ?

A. Vers 0.

Faux.

C'est la fraction $\dfrac{6}{n+1}$ qui se rapproche de 0, pas u_n.

B. Vers 2.

Juste.

Juste : u_n dépasse 2 d'un écart $\dfrac{6}{n+1}$ de plus en plus petit.

C. Vers 8.

Faux.

8 est le premier terme, et un majorant : les termes s'en éloignent.

D. Vers $+\infty$.

Faux.

Les termes diminuent : ils ne dépassent jamais 8.

Correction

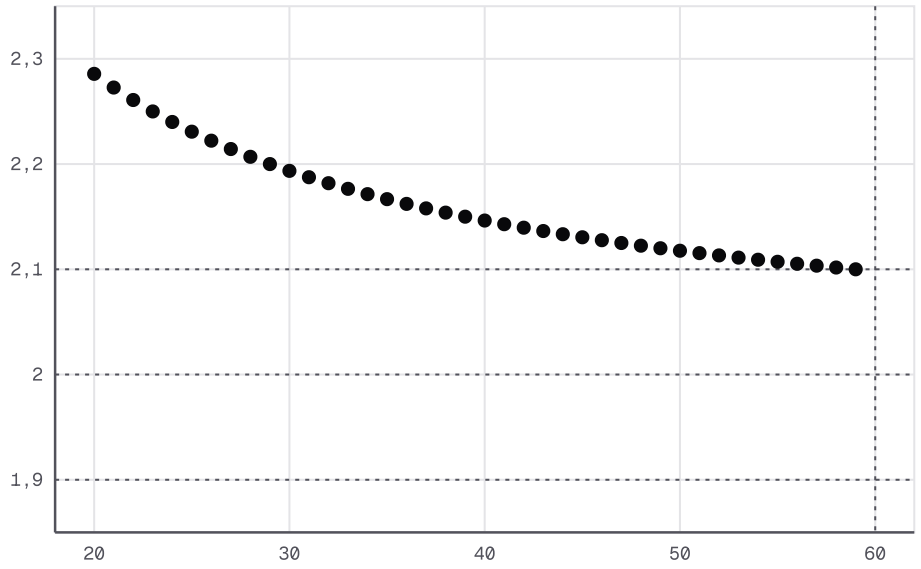
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 = \dfrac{6}{n+1}$.

Quand n grandit, cet écart devient aussi petit que l'on veut : $0{,}1$ pour $n = 59$, $0{,}01$ pour $n = 599$. Les termes se rapprochent de 2, sans jamais l'atteindre.

En clair. Choisis une marge autour de 2, par exemple l'intervalle $]1{,}9\,;\,2{,}1[$. Le terme $u_{59} = 2{,}1$ n'est pas dans cet intervalle ouvert.

Mais dès $n = 60$, l'écart $\dfrac{6}{n+1}$ est plus petit que $0{,}1$: tous les termes suivants sont dans l'intervalle.

Avec une marge plus petite, il faut aller plus loin, mais cela marche toujours. On dit que (u_n) **converge** vers 2.



Les termes u_n = 2 + 6/(n + 1), pour n allant de 20 à 59, descendent vers la bande comprise entre 1,9 et 2,1. Le terme u_59 vaut exactement 2,1 : il est sur le bord, et tous les termes à partir du rang 60 sont dans la bande.

Définition : Limite d'une suite

Soit (u_n) une suite et ℓ un réel.

- On dit que (u_n) **converge vers** ℓ, ou a pour limite ℓ, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et on admet que ce réel ℓ est unique.
- On dit que (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang ; on définit de même la limite $-\infty$ avec les intervalles $]-\infty;A[$.
- Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** : soit elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, soit elle n'a pas de limite.

Exemple : une limite infinie

Soit $v_n = n^2$ et $A = 10\,000$. Pour $n \geq 101$, on a $n^2 \geq 10\,201$, donc $v_n > 10\,000$. Tous les termes à partir du rang 101 sont dans $]10\,000;+\infty[$.

Pour un réel $A > 0$ quelconque, les termes de rang $n > \sqrt{A}$ dépassent A. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Les suites de référence

> **Devine : Une racine au dénominateur**

Pour $n \geq 1$, on pose $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a $t_{100} = 0{,}1$ et $t_{10\,000} = 0{,}01$. Que deviennent les termes quand n grandit ?

A. Ils ont pour limite $+\infty$, car $\sqrt{n}$ grandit.

Faux.

C'est $\sqrt{n}$ qui grandit ; son inverse devient petit.

B. Ils se rapprochent de 1, la valeur de t_1.

Faux.

Les termes s'éloignent de 1 : $t_{100} = 0{,}1$.

C. Ils n'ont pas de limite, car ils ne s'annulent jamais.

Faux.

Une suite peut converger vers 0 sans jamais valoir 0.

D. Ils se rapprochent de 0, sans l'atteindre.

Juste.

Juste : l'inverse d'un nombre de plus en plus grand devient de plus en plus petit.

Correction

Le dénominateur $\sqrt{n}$ devient aussi grand que l'on veut. Son inverse devient donc aussi petit que l'on veut, tout en restant strictement positif. Les termes se rapprochent de 0 : c'est une des limites de référence qui suivent.

Propriété : Limites des suites de référence

Pour tout entier naturel $k \geq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Remarque

Ce résultat est admis. Ces quatre limites servent de briques : les autres limites du chapitre s'en déduisent.

Exemple : appliquer les limites de référence

- Avec $k = 3$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$.
- Avec la racine carrée : pour $n > 10\,000$, on a $\sqrt{n} > 100$. Les termes de $(\sqrt{n})$ dépassent tout réel fixé : leur limite est $+\infty$.

- Pour $n \geq 1$, on a $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$, et ces termes ont pour limite 0.

Deux pièges, puis à toi

Attention : croissante ne veut pas dire limite infinie

✗ « La suite (u_n) est croissante, donc elle a pour limite $+\infty$. »

✓ Une suite croissante peut converger. Par exemple, $u_n = 4 - \dfrac{3}{n+1}$ est croissante et converge vers 4 : elle reste sous 4. Une suite croissante n'a pour limite $+\infty$ que si elle n'est pas majorée.

Exemple : une suite sans limite

Soit $w_n = 2 + (-1)^n$. Les termes valent $3, 1, 3, 1$, et ainsi de suite.

Pour tout réel ℓ, l'intervalle ouvert $]\ell - 0{,}5 ; \ell + 0{,}5[$ a une longueur 1 : il ne peut pas contenir à la fois 1 et 3. Il laisse donc dehors une infinité de termes, et aucun réel n'est limite.

Bornée, la suite n'a pas non plus de limite infinie. La suite (w_n) n'a pas de limite : elle diverge.

À toi : Un rang à partir duquel

Soit $u_n = 7 - \dfrac{4}{n+1}$. Conjecture la limite de (u_n). À partir de quel rang chaque terme appartient-il à l'intervalle $]6{,}9 ; 7{,}1[$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris l'écart entre la limite conjecturée et le terme de rang n.
Indice 2
L'écart vaut $\dfrac{4}{n+1}$: cherche quand il devient strictement plus petit que $0{,}1$.
Indice 3
Point délicat : l'intervalle est ouvert. Calcule le terme au rang limite et vérifie s'il est dedans.

Réponse
Conjecture. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7 - u_n = \dfrac{4}{n+1}$. Cet écart se rapproche de 0 : on conjecture que (u_n) converge vers 7.

Rang. Les termes sont toujours plus petits que 7. Il faut donc $\dfrac{4}{n+1} < 0{,}1$, c'est-à-dire $n + 1 > 40$, soit $n \geq 40$.

Contrôle. $u_{39} = 6{,}9$ n'est pas dans l'intervalle ouvert, mais u_{40} y est. Au-delà d'un certain rang, chaque terme appartient à l'intervalle : ici, dès le rang 40.

Limite de qⁿ ; opérations sur les limites

Les puissances d'un réel

Devine : Deux puissances

La calculatrice donne $1{,}05^{10}$ environ $1{,}63$, $1{,}05^{50}$ environ $11{,}47$ et $1{,}05^{100}$ environ $131{,}5$. Elle donne aussi $0{,}8^{10}$ environ $0{,}107$, et $0{,}8^{50}$ moins de $0{,}000\,02$. Que deviennent $1{,}05^n$ et $0{,}8^n$ quand n grandit ?

A. $1{,}05^n$ a pour limite $+\infty$, et $0{,}8^n$ tend vers 0.

Juste.
Juste : la raison $1{,}05$ dépasse 1, et la raison $0{,}8$ est entre -1 et 1.

B. Les deux ont pour limite $+\infty$, car on multiplie sans arrêt.

Faux.
Multiplier par $0{,}8$ fait diminuer un nombre positif : $0{,}8^n$ décroît.

C. $1{,}05^n$ se stabilise, car $1{,}05$ est proche de 1.

Faux.
Même proche de 1, une raison plus grande que 1 fait grandir les puissances sans fin : $131{,}5$ pour $n = 100$.

D. Aucune des deux n'a de limite.

Faux.
Les valeurs montrent une croissance sans fin pour l'une, et un rapprochement de 0 pour l'autre.

Correction

Pour $q = 1{,}05 > 1$, les puissances q^n grandissent sans limite : $(1{,}05^n)$ a pour limite $+\infty$.

Pour $q = 0{,}8$, compris entre -1 et 1, les puissances se rapprochent de 0. C'est le résultat suivant.

Propriété : Limite des puissances d'un réel q

Soit q un réel.

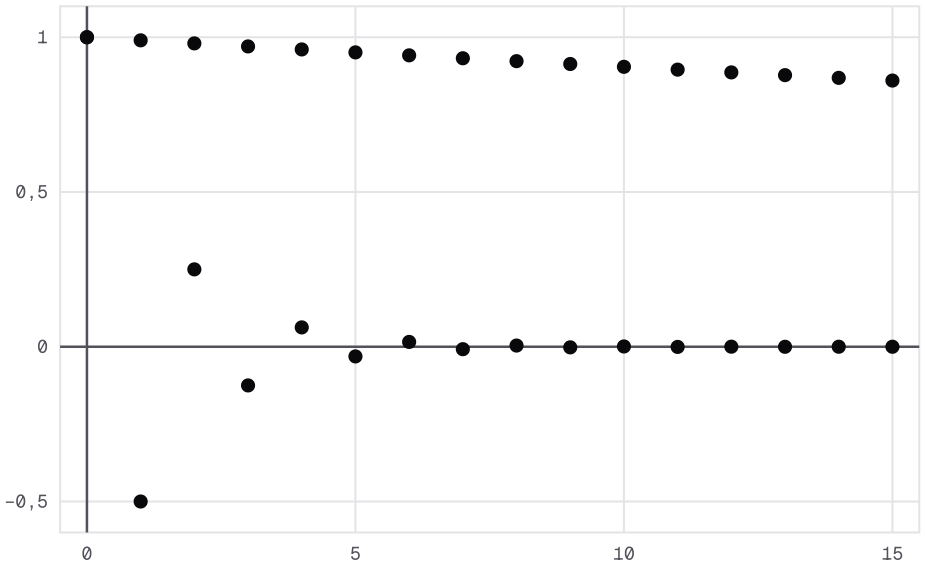
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $q^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la limite vaut 1.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Remarque

Ce résultat est admis. Retiens surtout la position de q par rapport à -1 et à 1.

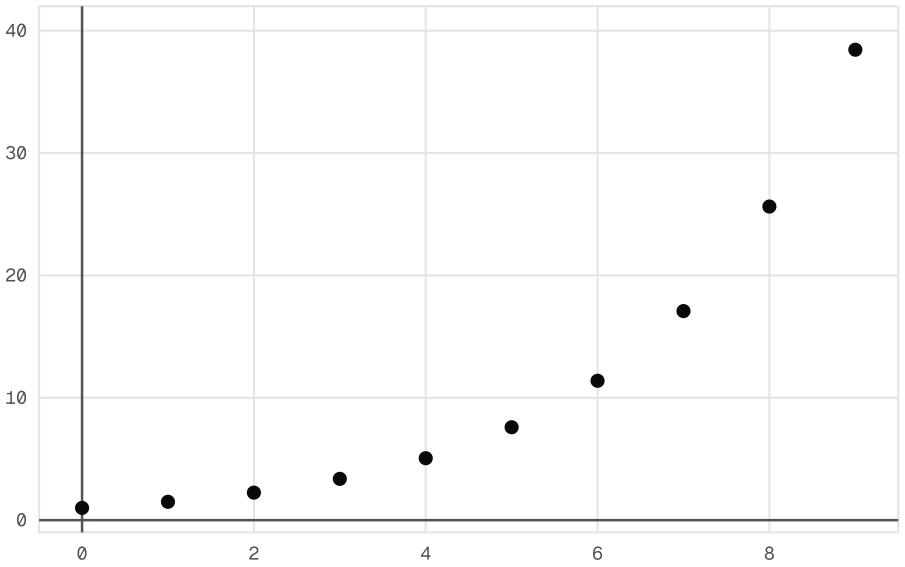
Exemple : quatre raisons

- $q = 1{,}5 > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}5^n = +\infty$.
- $q = -0{,}5$, entre -1 et 1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}5)^n = 0$.
- $q = 0{,}99$, entre -1 et 1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}99^n = 0$, même si la descente est lente.
- $q = -3 \leq -1$: la suite $((-3)^n)$ n'a pas de limite.



● Termes de la suite (u_n) ● Termes de la suite (v_n)

Deux raisons entre –1 et 1 : les termes (–0,5)ⁿ alternent de signe et se resserrent vite autour de 0 ; les termes 0,99ⁿ descendent vers 0 très lentement.



● Termes de la suite (w_n)

Une raison plus grande que 1 : les termes 1,5ⁿ grandissent de plus en plus vite et dépassent n'importe quel nombre, d'où la limite +∞.

Opérations sur les limites

Propriété : Opérations sur les limites de suites

Les limites d'une somme, d'un produit et d'un quotient de suites se calculent avec les mêmes règles que les limites de fonctions en $+\infty$. Soit (u_n) et (v_n) deux suites, ℓ et ℓ' deux réels ; toutes les limites sont prises quand n tend vers $+\infty$.

- Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) vers ℓ', alors $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$, $(u_n v_n)$ vers $\ell\,\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.
- Si (u_n) a pour limite $+\infty$ et si (v_n) converge ou a pour limite $+\infty$, alors $(u_n + v_n)$ a pour limite $+\infty$.
- Si (u_n) a pour limite $+\infty$ et si (v_n) converge vers $\ell' > 0$ ou a pour limite $+\infty$, alors $(u_n v_n)$ a pour limite $+\infty$; si $\ell' < 0$, la limite est $-\infty$.
- Si (u_n) converge et si (v_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.
- Les règles pour $-\infty$ s'obtiennent par la règle des signes. Les cas $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \times (+\infty)$, $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$ sont des **formes indéterminées** : on transforme alors l'écriture.

Remarque

Ce résultat est admis. Ce sont les règles que tu connais déjà pour les limites de fonctions en $+\infty$.

Exemple : appliquer les opérations

- $u_n = 3 + \dfrac{5}{n}$ pour $n \geq 1$: $\dfrac{5}{n}$ tend vers 0, donc, par somme, (u_n) converge vers 3.
- $v_n = 200 \times 0{,}9^n$: $0{,}9^n$ tend vers 0, car $-1 < 0{,}9 < 1$. Par produit, (v_n) converge vers 0.
- $w_n = n^2 + \sqrt{n}$: c'est une somme de deux suites de limite $+\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

Lever une forme indéterminée

Méthode : calculer la limite d'une suite

1. **Repère** les suites de référence, les puissances q^n ou une écriture $u_n = f(n)$.
2. **Applique** les opérations : somme, produit, quotient.
3. **En cas de forme indéterminée**, transforme l'écriture : mets en facteur le terme qui l'emporte, puis simplifie.
4. **Conclus** en nommant les limites de référence et les opérations utilisées.

Exemple : deux formes indéterminées

Un quotient. La suite $u_n = \dfrac{3n^2 + n}{n^2 + 4}$ est de la forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Pour $n \geq 1$, on met n^2 en facteur en haut et en bas :

$$u_n = \frac{3 + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{4}{n^2}}.$$

Par quotient, (u_n) converge vers 3.

Une différence. La suite $v_n = 3^n - 2^n$ est de la forme $(+\infty) - (+\infty)$. On met en facteur la puissance de plus grande raison :

$$v_n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Or $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ tend vers 0, et 3^n a pour limite $+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exemple : la limite d'une somme géométrique

Soit $S_n = 1 + 0{,}5 + 0{,}5^2 + \cdots + 0{,}5^n$. C'est la somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique de raison $0{,}5$ et de premier terme 1. Donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1 - 0{,}5^{n+1}}{1 - 0{,}5} \\ &= 2\left(1 - 0{,}5^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, la puissance $0{,}5^{n+1}$ tend vers 0. Par produit et somme, (S_n) converge vers 2.

Deux pièges, puis à toi

Attention : une forme indéterminée ne vaut pas zéro

✗ « $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2 - 5n) = (+\infty) - (+\infty) = 0$. »

✓ $(+\infty) - (+\infty)$ est une forme indéterminée : on transforme l'écriture. On factorise $n^2 - 5n = n(n-5)$. C'est un produit de deux suites de limite $+\infty$: la limite vaut $+\infty$.

Attention : une raison négative

✗ « $-1{,}5 < 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1{,}5)^n = -\infty$. »

✓ Les termes valent 1, $-1{,}5$, $2{,}25$, $-3{,}375$: ils changent de signe à chaque rang. Comme $-1{,}5 \leq -1$, la suite $((-1{,}5)^n)$ n'a pas de limite.

Vérifie : Un quotient

Quelle est la limite de $u_n = \dfrac{2n+3}{5n-1}$, définie pour tout $n \geq 1$?

A. -3

Faux.

C'est la valeur de $\dfrac{3}{-1}$, obtenue pour $n = 0$: elle ne dit rien de la limite.

B. 1

Faux.

Une forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ne vaut pas 1 : il faut transformer l'écriture.

C. $\dfrac{2}{5}$

Juste.

Juste : on met n en facteur au numérateur et au dénominateur.

D. $+\infty$

Faux.

Le numérateur et le dénominateur grandissent tous les deux : leur quotient ne grandit pas sans fin.

Correction

C'est une forme $\frac{+\infty}{+\infty}$. Pour $n \geq 1$, on met n en facteur en haut et en bas :

$$u_n = \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{5 - \dfrac{1}{n}}.$$

Or $\frac{3}{n}$ et $\frac{1}{n}$ tendent vers 0. Par quotient, (u_n) converge vers $\frac{2}{5}$.

À toi : Deux limites

Calcule la limite de $u_n = 500 \times 0{,}8^n + 3$, puis celle de $v_n = n^3 - 4n^2 + 1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour (u_n), utilise la limite des puissances de $0{,}8$. Pour (v_n), repère une forme indéterminée.

Indice 2

Pour $n \geq 1$, écris $v_n = n^3 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}\right)$.

Indice 3

Point délicat : $n^3 - 4n^2$ est de la forme $(+\infty) - (+\infty)$; ne conclus qu'après la factorisation.

Réponse

Limite de (u_n). Comme $-1 < 0{,}8 < 1$, la puissance $0{,}8^n$ tend vers 0. Par produit et somme, (u_n) converge vers $500 \times 0 + 3 = 3$.

Limite de (v_n). C'est une forme $(+\infty) - (+\infty)$. Pour $n \geq 1$, on factorise :

$$v_n = n^3 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}\right).$$

La parenthèse converge vers 1, et n^3 a pour limite $+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Suites $u_n = f(n)$; comparaison et encadrement

Une suite qui suit une fonction

Devine : Un coût moyen

Le coût moyen fictif d'un objet, en dirhams, le mois n de production, vaut $c_n = \dfrac{5n + 60}{n + 1}$. La calculatrice donne $c_0 = 60$, $c_{10} = 10$, $c_{54} = 6$ et $c_{109} = 5{,}5$. Que se passe-t-il quand n grandit ?

A. Les termes diminuent et se rapprochent de 0.

Faux.

Les termes restent au-dessus de 5 : $c_n - 5 = \dfrac{55}{n+1}$ est positif.

B. Les termes diminuent et se rapprochent de 5.

Juste.

Juste : $c_n = 5 + \dfrac{55}{n+1}$, et la fraction se rapproche de 0.

C. Les termes augmentent sans limite.

Faux.

Les valeurs du tableau diminuent : $60, 10, 6, 5{,}5$.

D. Les termes se rapprochent de 60.

Faux.

60 est le premier terme : les termes s'en éloignent.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fait apparaître 5 au numérateur :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{5(n+1)+55}{n+1} \\ &= 5 + \frac{55}{n+1}. \end{aligned}$$

La fonction $f : x \mapsto 5 + \dfrac{55}{x+1}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et a pour limite 5 en $+\infty$. Les termes diminuent et se rapprochent de 5 : c'est ce que dit le résultat suivant.

Propriété : Suite de terme général f(n)

Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si f a pour limite L en $+\infty$ (L réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$), alors (u_n) a pour limite L.
- Si f est croissante sur $[0;+\infty[$, alors (u_n) est croissante ; si f est décroissante sur $[0;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

Démonstration

Idée de la preuve. Monotonie : si f est croissante sur $[0;+\infty[$, comme $n < n+1$, on a $f(n) \leq f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; le cas décroissant est identique, avec l'inégalité inversée. Limite : les termes u_n sont des valeurs de f en des réels n qui deviennent aussi grands que l'on veut ; le passage de la limite de f à celle de la suite n'est pas détaillé et reste admis.

Exemple : une suite rationnelle

Soit $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$ sur $[0;+\infty[$.

Sens de variation. Rappel de 1BAC : si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, f y est strictement croissante. Ici, pour tout $x \geq 0$:

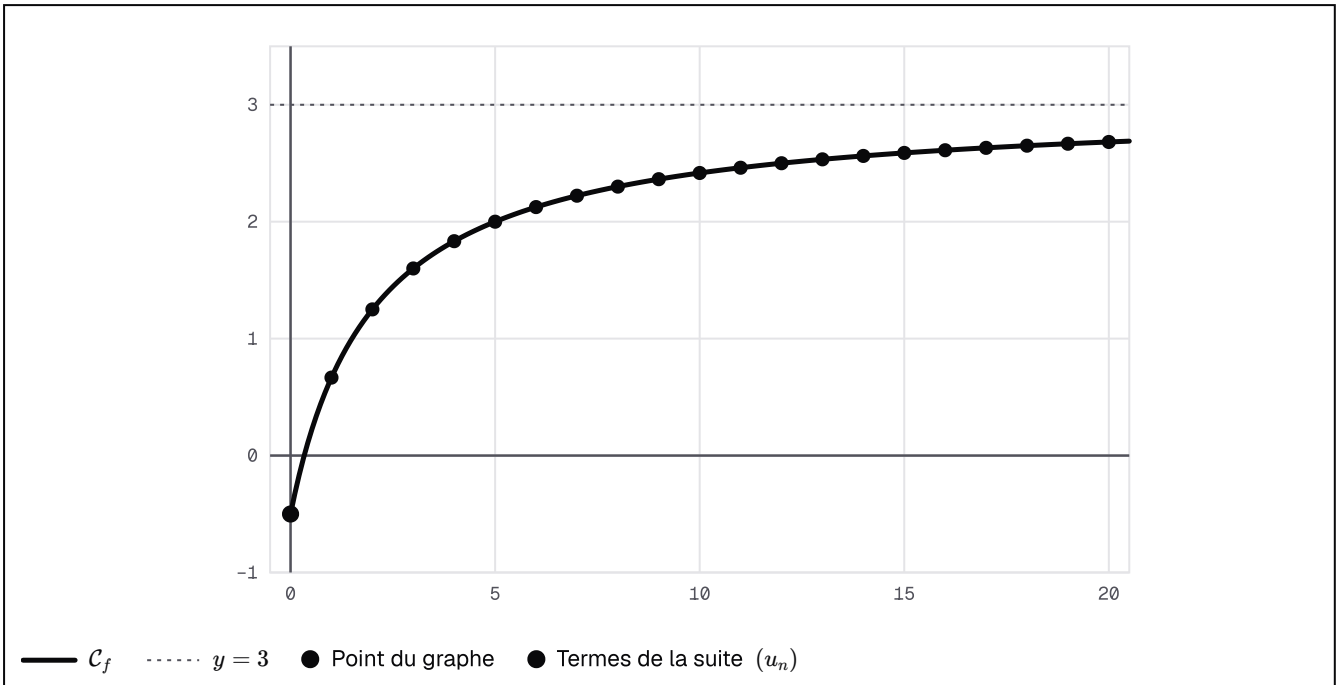
$$f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2} > 0.$$

Donc f est croissante sur $[0;+\infty[$, et (u_n) est croissante.

Limite. Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{3 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{2}{x}}.$$

En $+\infty$, f a pour limite 3. Donc (u_n) converge vers 3.



Les points (n ; u_n) de la suite u_n = (3n − 1)/(n + 2) sont sur la courbe de f : x ↦ (3x − 1)/(x + 2). La courbe monte vers la droite d'équation y = 3, et les termes avec elle.

Exemple : une racine carrée

Soit $v_n = \sqrt{2n+9}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $v_n = g(n)$ avec $g : x \mapsto \sqrt{2x+9}$.

Sens de variation. La fonction g est croissante sur $[0;+\infty[$, car $x \mapsto 2x+9$ l'est et la racine carrée conserve l'ordre. Donc (v_n) est croissante.

Limite. $2x+9$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, donc g aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Comparer et encadrer

Devine : Un terme qui oscille

Soit $u_n = n^2 + (-1)^n$. Les premiers termes valent $1, 0, 5, 8, 17, 24$. Que peux-tu dire de la limite de (u_n) ?

A. Elle vaut $+\infty$, car $u_n \geq n^2 - 1$.

Juste.

Juste : (u_n) est minorée par une suite de limite $+\infty$.

B. Elle n'existe pas, car $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Faux.

Le terme $(-1)^n$ reste entre -1 et 1 : il ne gêne pas n^2, qui grandit.

C. Elle vaut 0, car $u_1 = 0$.

Faux.

Un terme isolé ne donne pas la limite : $u_5 = 24$.

D. Elle vaut 1, la valeur de u_0.

Faux.

Les termes s'éloignent de 1.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geq -1$, donc $u_n \geq n^2 - 1$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$. Une suite plus grande qu'une suite de limite $+\infty$ a aussi pour limite $+\infty$: c'est le premier point du théorème suivant.

Théorème : Comparaison et encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et ℓ un réel. Les inégalités ci-dessous sont supposées vraies à partir d'un certain rang ; les limites sont prises quand n tend vers $+\infty$.

- Si $u_n \geq v_n$ et si (v_n) a pour limite $+\infty$, alors (u_n) a pour limite $+\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ et si (v_n) a pour limite $-\infty$, alors (u_n) a pour limite $-\infty$.
- **Encadrement** : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) convergent toutes deux vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.
- Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ et si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers ℓ.
- Si (u_n) et (v_n) convergent et si $u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Remarque

Ce résultat est admis. Il prolonge les théorèmes de comparaison et d'encadrement des limites de fonctions.

Exemple : un encadrement

Soit $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. On divise par $n+1 > 0$, puis on ajoute 3 :

$$3 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 3 + \frac{1}{n+1}.$$

Les deux suites qui encadrent u_n convergent vers 3. D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 3.

La méthode, puis à toi

Méthode : comparer ou encadrer

1. **Établis** une inégalité entre u_n et une ou deux suites plus simples, par exemple à partir de $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.
2. **Choisis** le résultat : minorer par une suite de limite $+\infty$, majorer par une suite de limite $-\infty$, ou encadrer par deux suites de même limite.
3. **Calcule** les limites des suites de comparaison.
4. **Conclus** en citant le théorème de comparaison ou d'encadrement.

Exemple : une comparaison vers moins l'infini

Soit $w_n = -n^2 + 3 \times (-1)^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \times (-1)^n \leq 3$, donc :

$$w_n \leq 3 - n^2.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (3 - n^2) = -\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$.

Vérifie : Le bon encadrement

Soit $u_n = \dfrac{5 + (-1)^n}{n+1}$. Quel encadrement permet de trouver la limite de (u_n) ?

A. $0 \leq u_n \leq 6$

Faux.

C'est vrai, mais les deux bornes, 0 et 6, n'ont pas la même limite : on ne peut pas conclure.

B. $-1 \leq u_n \leq 1$

Faux.

C'est faux : $u_0 = 6$ dépasse 1.

C. $\dfrac{4}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{6}{n+1}$

Juste.

Juste : les deux bornes convergent vers 0.

D. $u_n \geq \dfrac{4}{n+1}$ seulement

Faux.

Une minoration par une suite qui tend vers 0 ne donne pas la limite.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq 5 + (-1)^n \leq 6$. On divise par $n+1$, strictement positif :

$$\frac{4}{n+1} \leq u_n \leq \frac{6}{n+1}.$$

Les deux bornes convergent vers 0. D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 0.

À toi : Un encadrement à trouver

Soit $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{n+3}$. Montre que (u_n) converge, et donne sa limite. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Encadre d'abord $2n + (-1)^n$ à l'aide de $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

Indice 2

Tu obtiens $\dfrac{2n-1}{n+3} \leq u_n \leq \dfrac{2n+1}{n+3}$: calcule la limite de chaque borne.

Indice 3

Point délicat : tu divises par $n+3$, strictement positif, donc le sens des inégalités ne change pas.

Réponse

Encadrement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n - 1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n + 1$. On divise par $n + 3 > 0$:

$$\frac{2n-1}{n+3} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n+3}.$$

Limites des bornes. Pour $n \geq 1$:

$$\frac{2n-1}{n+3} = \frac{2 - \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{3}{n}}.$$

Par quotient, cette borne converge vers 2 ; de même pour la borne de droite.

Conclusion. D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 2.

Suites monotones et convergence

Monter sans dépasser

Devine : Des abonnés plafonnés

Le nombre fictif d'abonnés d'une application augmente tous les mois. Le serveur ne peut jamais en accueillir plus de $10\,000$. Que peux-tu dire du nombre d'abonnés à long terme ?

A. Il a pour limite $+\infty$, car il augmente tous les mois.

Faux.
Il ne dépasse jamais $10\,000$: il ne peut pas dépasser tout nombre.

B. Il se rapproche forcément de $10\,000$, le plafond.

Faux.
Il peut se stabiliser plus bas, par exemple vers $6\,000$.

C. Il se rapproche d'un nombre inférieur ou égal à $10\,000$.

Juste.
Juste : une suite croissante et majorée converge, et sa limite reste sous le majorant.

D. On ne peut rien dire, car il peut osciller.

Faux.
Il augmente tous les mois : il ne peut pas osciller.

Correction
La suite des nombres d'abonnés est croissante et majorée par $10\,000$.

Elle ne peut ni redescendre, ni dépasser $10\,000$: elle se rapproche d'un nombre $\ell \leq 10\,000$. Ce nombre n'est pas forcément $10\,000$.

Théorème : Suites monotones et convergence

- Toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$; toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.
- Si (u_n) est croissante, majorée par M et converge vers ℓ, alors $\ell \leq M$; si (u_n) est décroissante, minorée par m et converge vers ℓ, alors $\ell \geq m$.

Remarque

Ce résultat est admis. Il garantit qu'une limite existe, sans dire combien elle vaut.

Exemple : une suite croissante et majorée

Soit $u_n = 6 - \dfrac{5}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

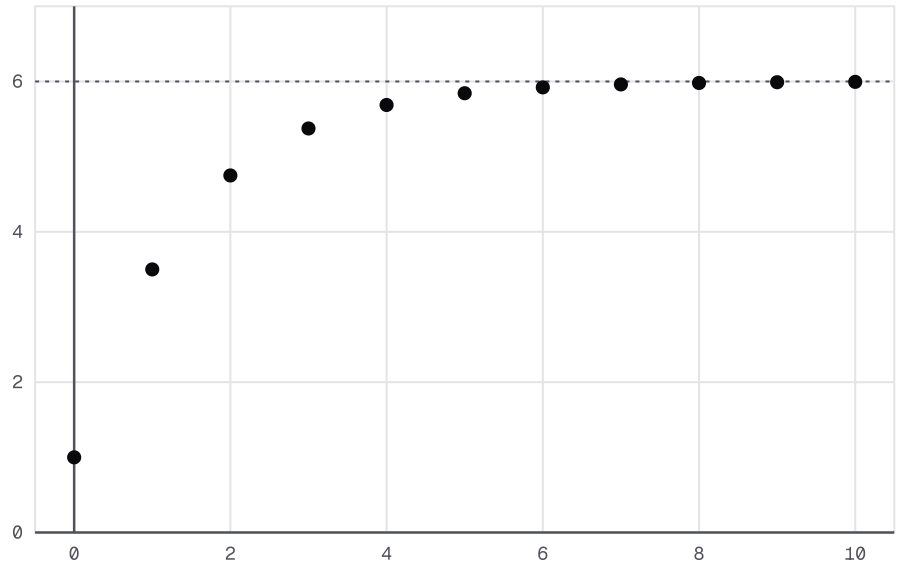
Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5}{2^n} - \frac{5}{2^{n+1}} \\ &= \frac{5}{2^{n+1}} > 0. \end{aligned}$$

La suite est croissante.

Majorant. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{5}{2^n} > 0$, donc $u_n < 6$: la suite est majorée par 6.

Convergence. D'après le théorème des suites monotones, (u_n) converge. Ici, on trouve aussi sa limite : $\dfrac{5}{2^n} = 5 \times 0{,}5^n$ tend vers 0, donc la limite vaut 6.



La suite u_n = 6 – 5/2ⁿ : chaque terme est plus haut que le précédent, mais aucun n'atteint la droite d'équation y = 6. Croissante et majorée par 6, elle converge, ici vers 6.

Un piège, puis à toi

Attention : un majorant n'est pas la limite

✗ « (u_n) est croissante et majorée par 10, donc elle converge vers 10. »

✓ Elle converge vers un réel $\ell \leq 10$, pas forcément égal à 10. La suite $u_n = 6 - \dfrac{5}{2^n}$ est croissante, majorée par 10, et sa limite vaut 6.

Exemple : une suite définie par récurrence

Soit (w_n) définie par $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \sqrt{w_n + 6}$.

Encadrement. Par récurrence (méthode de la section « Suites : définition, bornes, monotonie »), on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq w_n \leq w_{n+1} \leq 3.$$

Hérédité : si $1 \leq w_n \leq w_{n+1} \leq 3$, alors $7 \leq w_n + 6 \leq w_{n+1} + 6 \leq 9$. La racine carrée conserve l'ordre, donc $\sqrt{7} \leq w_{n+1} \leq w_{n+2} \leq 3$.

Convergence. Les premiers termes valent 1, puis environ $2{,}646$ et $2{,}940$. La suite est croissante et majorée par 3 : d'après le théorème des suites monotones, elle converge. Sa limite se calcule avec la méthode de la section « Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Vérifie : Décroissante et positive

Une suite (p_n) est décroissante, et tous ses termes sont strictement positifs. Que peux-tu affirmer ?

A. Elle converge vers 0.

Faux.

Pas forcément : $1 + \dfrac{1}{n+1}$ décroît, reste positive et converge vers 1.

B. Elle converge vers un réel strictement positif.

Faux.

Pas forcément : $\dfrac{1}{n+1}$ décroît, reste positive et converge vers 0.

C. Elle a pour limite $-\infty$, car elle décroît.

Faux.

Elle est minorée par 0 : elle ne peut pas descendre sous 0.

D. Elle converge vers un réel positif ou nul.

Juste.

Juste : décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Correction

La suite est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème des suites monotones, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Les deux exemples des retours montrent qu'on ne peut pas dire mieux : la limite peut valoir 0, ou un réel strictement positif.

À toi : Croissante et majorée

Soit $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On sait que (a_n) est croissante. Montre par récurrence que $0 \leq a_n \leq 4$ pour tout n, puis conclus sur la convergence. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Rédige l'initialisation, puis l'hérédité, comme dans la méthode de la récurrence.
Indice 2
Si $0 \leq a_n \leq 4$, encadre d'abord $3a_n + 4$, puis prends la racine carrée.
Indice 3
Point délicat : majorée par 4 ne veut pas dire limite 4 ; le théorème donne seulement $\ell \leq 4$.

Réponse
Initialisation : $a_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 4$.

Hérédité : soit n un entier naturel tel que $0 \leq a_n \leq 4$. Alors $4 \leq 3a_n + 4 \leq 16$. La racine carrée conserve l'ordre des réels positifs, donc $2 \leq a_{n+1} \leq 4$, et $0 \leq a_{n+1} \leq 4$.

Conclusion : $0 \leq a_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite est croissante et majorée par 4 : d'après le théorème des suites monotones, elle converge vers un réel $\ell \leq 4$.

Suites $u_{n+1} = a\,u_n + b$: la suite auxiliaire

Un club qui se stabilise

Devine : Les abonnés d'un club

Un club de lecture fictif compte $1\,000$ abonnés au mois 0. Tous les mois, 80 pour cent des abonnés restent, et 300 nouveaux arrivent : $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 300$. La calculatrice donne $u_1 = 1\,100$, $u_2 = 1\,180$, $u_3 = 1\,244$, et u_{10} environ $1\,446$. Vers quel nombre d'abonnés le club semble-t-il se stabiliser ?

A. Vers $1\,300$, soit $1\,000 + 300$.
Faux.
Le club dépasse déjà $1\,300$ abonnés au mois 10.

B. Vers $+\infty$, car 300 abonnés arrivent tous les mois.
Faux.
Des abonnés partent aussi : 20 pour cent d'un grand nombre finit par compenser les 300 arrivées.

C. Vers 375, soit 300 divisé par $0{,}8$.
Faux.
Le club compte déjà plus de $1\,000$ abonnés : il ne descend pas à 375.

D. Vers $1\,500$ abonnés.
Juste.

Juste : avec $1\,500$ abonnés, $0{,}8 \times 1\,500 + 300 = 1\,500$; rien ne change.

Correction
Cherchons un nombre d'abonnés qui ne change pas d'un mois à l'autre :

$$\ell = 0{,}8\,\ell + 300.$$

On obtient $0{,}2\,\ell = 300$, soit $\ell = 1\,500$.

L'écart à $1\,500$ vaut -500 au départ. Puis il est multiplié par $0{,}8$ tous les mois : -400, -320, -256. Il se rapproche de 0, et le nombre d'abonnés se rapproche de $1\,500$.

Pourquoi est-ce vrai ? Un réel ℓ joue un rôle spécial : celui qui ne bouge pas, tel que $\ell = a\,\ell + b$.

On compare alors la suite à ce réel. L'écart $u_n - \ell$ est multiplié par a à chaque rang : c'est une suite géométrique. Le théorème suivant le démontre en général.

Théorème : Suite auxiliaire d'une suite récurrente affine

Soit a et b deux réels avec $a \neq 1$, et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a\,u_n + b$. On pose $\ell = \dfrac{b}{1-a}$: c'est l'unique réel tel que $\ell = a\,\ell + b$.

- La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n$.
- Si $-1 < a < 1$, alors (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration

Étape 1. Le réel ℓ vérifie $\ell = a\,\ell + b$ si et seulement si $(1-a)\,\ell = b$, c'est-à-dire $\ell = \dfrac{b}{1-a}$, car $1 - a \neq 0$.

Étape 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on soustrait membre à membre les égalités $u_{n+1} = a\,u_n + b$ et $\ell = a\,\ell + b$: $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = a\,(u_n - \ell) = a\,v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison a.

Étape 3. D'après le terme général d'une suite géométrique, $v_n = v_0\,a^n = (u_0 - \ell)\,a^n$, donc $u_n = v_n + \ell = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n$.

Étape 4. Si $-1 < a < 1$, d'après la limite des puissances d'un réel, (a^n) converge vers 0 ; d'après les opérations sur les limites, (u_n) converge vers $\ell + (u_0 - \ell) \times 0 = \ell$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On **soustrait membre à membre** les deux égalités $u_{n+1} = a\,u_n + b$ et $\ell = a\,\ell + b$. Le terme b disparaît, et il reste :

$$u_{n+1} - \ell = a\,(u_n - \ell).$$

Tout le reste découle de la suite géométrique : son terme général, puis la limite des puissances de a. L'hypothèse $a \neq 1$ sert à calculer $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Vérifie : Le geste de la preuve

Soit $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 2$. Le réel fixe vaut 4, car $0{,}5 \times 4 + 2 = 4$. Refais le geste de la preuve : soustrais membre à membre $4 = 0{,}5 \times 4 + 2$ de $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 2$. Quelle égalité obtiens-tu ?

A. $u_{n+1} - 4 = 0{,}5\,(u_n - 4)$
Juste.
Juste : le terme 2 disparaît dans la différence, comme b dans la preuve.

B. $u_{n+1} - 4 = 0{,}5\,(u_n - 4) + 2$
Faux.
Le terme 2 figure dans les deux égalités : il disparaît dans la différence.

C. $u_{n+1} - 2 = 0{,}5\,(u_n - 2)$
Faux.
Tu as soustrait $b = 2$ au lieu du réel fixe 4 : le membre de droite vaut $0{,}5\,u_n - 1$, et non $0{,}5\,u_n$.

D. $u_{n+1} - 4 = 0{,}5\,(u_n - 8)$
Faux.
Développe : $0{,}5\,(u_n - 8) = 0{,}5\,u_n - 4$, alors que $u_{n+1} - 4 = 0{,}5\,u_n - 2$.

Correction
On soustrait membre à membre les deux égalités :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - 4 \\ &= 0{,}5\,u_n - 0{,}5 \times 4 \\ &= 0{,}5\,(u_n - 4). \end{aligned}$$

Le terme 2 disparaît, exactement comme b dans la preuve. Avec $v_n = u_n - 4$, cela s'écrit $v_{n+1} = 0{,}5\,v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}5$.

Deux exemples, la méthode, un piège

Exemple : deux cas, et une hypothèse nécessaire

Une suite convergente. Soit $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3$. Ici $a = 0{,}5$ et :

$$\ell = \frac{3}{1 - 0{,}5} = 6.$$

Donc $u_n = 6 + 4 \times 0{,}5^n$, et (u_n) converge vers 6, car $-1 < 0{,}5 < 1$.

Une suite divergente. Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2\,u_n - 3$. Ici $\ell = 3$ et $u_n = 3 + 2^n$. Comme $u_0 - \ell = 1 \neq 0$ et $2 > 1$, la suite a pour limite $+\infty$: elle ne converge pas. Si $u_0 = \ell$, la suite serait constante.

L'hypothèse sur a compte. Pour $u_{n+1} = u_n + 3$, on a $a = 1$, et l'équation $\ell = \ell + 3$ n'a pas de solution. La suite est arithmétique, sans suite auxiliaire.

Méthode : étudier une suite affine par une suite auxiliaire

1. **Identifie** a et b dans $u_{n+1} = a\,u_n + b$, vérifie que $a \neq 1$ et calcule $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. Si l'énoncé donne la suite auxiliaire, utilise-la telle quelle.
2. **Montre** que $v_n = u_n - \ell$ définit une suite géométrique : exprime v_{n+1} en fonction de u_n, puis de v_n.
3. **Exprime** $v_n = v_0\,a^n$, puis $u_n = v_n + \ell$.
4. **Conclus** sur la limite : si $-1 < a < 1$, (u_n) converge vers ℓ.

Attention : soustraire le bon nombre

✗ « $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 8$, donc on pose $v_n = u_n - 8$. »

✓ On soustrait $\ell = \dfrac{8}{1-0{,}6} = 20$, pas $b = 8$. Avec $v_n = u_n - 20$, on trouve $v_{n+1} = 0{,}6\,u_n - 12 = 0{,}6\,v_n$. Avec $u_n - 8$, on obtiendrait $0{,}6\,(u_n - 8) + 4{,}8$: la suite ne serait pas géométrique.

Exemple : le stock d'un entrepôt

Un entrepôt fictif contient $1\,000$ cartons au mois 0. Tous les mois, il vend 10 pour cent de son stock et reçoit 400 cartons. Donc $s_{n+1} = 0{,}9\,s_n + 400$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réel fixe. $\ell = \dfrac{400}{1-0{,}9} = 4\,000$.

Suite auxiliaire. On pose $v_n = s_n - 4\,000$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= s_{n+1} - 4\,000 \\ &= 0{,}9\,s_n - 3\,600 \\ &= 0{,}9\,v_n. \end{aligned}$$

Terme général. $v_0 = -3\,000$, donc $v_n = -3\,000 \times 0{,}9^n$ et $s_n = 4\,000 - 3\,000 \times 0{,}9^n$.

Limite. Comme $-1 < 0{,}9 < 1$, le stock se rapproche de $4\,000$ cartons.

À toi, puis le coin examen

Vérifie : Quelle suite auxiliaire

Soit $u_{n+1} = -0{,}5\,u_n + 6$. Quelle suite (v_n) est géométrique ?

A. $v_n = u_n - 6$

Faux.

Tu as soustrait $b = 6$. Le réel à soustraire est $\ell = \dfrac{6}{1-(-0{,}5)}$.

B. $v_n = u_n - 4$

Juste.

Juste : $\ell = \dfrac{6}{1{,}5} = 4$.

C. $v_n = u_n - 12$

Faux.

Tu as calculé $1 + (-0{,}5) = 0{,}5$ au dénominateur : c'est $1 - (-0{,}5) = 1{,}5$.

D. $v_n = u_n + 4$

Faux.

Le signe est inversé : on soustrait $\ell = 4$.

Correction

On cherche ℓ tel que $\ell = -0{,}5\,\ell + 6$: $1{,}5\,\ell = 6$, donc $\ell = 4$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= -0{,}5\,u_n + 2 \\ &= -0{,}5\,(u_n - 4) \\ &= -0{,}5\,v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $-0{,}5$.

Exemple : une population qui ne se stabilise pas

Une ville fictive compte $6\,000$ habitants. Tous les ans, sa population augmente de 2 pour cent, puis 100 habitants partent : $P_{n+1} = 1{,}02\,P_n - 100$.

Terme général. $\ell = \dfrac{-100}{1-1{,}02} = 5\,000$, et $P_n = 5\,000 + 1\,000 \times 1{,}02^n$.

Limite. Comme $1{,}02 > 1$, la puissance $1{,}02^n$ a pour limite $+\infty$. Par produit et somme, (P_n) a pour limite $+\infty$: la population ne se stabilise pas.

À toi : Une suite auxiliaire

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}75\,u_n + 2$. On pose $v_n = u_n - 8$. Montre que (v_n) est géométrique, exprime u_n en fonction de n, puis donne la limite de (u_n). Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Exprime v_{n+1} en fonction de u_n, puis factorise par $0{,}75$.

Indice 2

Tu dois trouver $v_{n+1} = 0{,}75\, v_n$; calcule ensuite v_0.

Indice 3

Point délicat : $v_0 = u_0 - 8$ est négatif ; garde son signe dans le terme général.

Réponse

Suite géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 8 \\ &= 0{,}75\, u_n - 6 \\ &= 0{,}75\,(u_n - 8) \\ &= 0{,}75\, v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}75$ et de premier terme $v_0 = 1 - 8 = -7$.

Terme général. $v_n = -7 \times 0{,}75^n$, donc $u_n = 8 - 7 \times 0{,}75^n$.

Limite. Comme $-1 < 0{,}75 < 1$, (u_n) converge vers 8.

Remarque : Coin examen : rédiger la suite auxiliaire

À l'examen, la question « montrer que (v_n) est géométrique » se rédige en une chaîne de calcul, puis une conclusion. Par exemple, pour $u_{n+1} = 0{,}4\, u_n + 3$ et $v_n = u_n - 5$:

« Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= 0{,}4\, u_n - 2 \\ &= 0{,}4\,(u_n - 5) \\ &= 0{,}4\, v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}4$. »

Écris toujours la raison, puis le premier terme.

Suites homographiques : une suite auxiliaire donnée

Une suite qui se rapproche

Devine : Des quotients

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$. On trouve $u_1 = 2{,}5$, $u_2 = \dfrac{16}{7}$ et $u_3 = \dfrac{50}{23}$. À la calculatrice, u_{10} vaut environ $2{,}009$. Vers quelle valeur les termes semblent-ils aller ?

A. Vers 2.
Juste.

Juste : les termes diminuent et se rapprochent de 2.

B. Vers 4, le quotient des coefficients de u_n.

Faux.

Les termes valent $2{,}5$, puis environ $2{,}29$: ils ne montent pas vers 4.

C. Vers -2, le quotient des termes constants.

Faux.

Tous les termes sont plus grands que 1 : ils ne peuvent pas aller vers -2.

D. Vers 0, car on divise sans arrêt.

Faux.

Les termes du tableau restent plus grands que 2.

Correction

Les termes diminuent : 3, $2{,}5$, environ $2{,}29$, puis environ $2{,}17$. Ils se rapprochent de 2.

On peut le vérifier : avec $u_n = 2$, on obtient $\dfrac{4 \times 2 - 2}{2 + 1} = 2$. Pour le démontrer, on utilise une suite auxiliaire donnée par l'énoncé.

Exemple **: Exemple guidé : une suite auxiliaire donnée**

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n}$. Une récurrence montre que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'énoncé donne $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Écart à 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{2u_n - 1 - u_n}{u_n} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n}. \end{aligned}$$

Suite auxiliaire. On en déduit :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n - 1} \\ &= \frac{(u_n - 1) + 1}{u_n - 1} \\ &= 1 + v_n. \end{aligned}$$

Conclusion. La suite (v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2}$: $v_n = n + \dfrac{1}{2}$.

Méthode **: utiliser une suite auxiliaire donnée**

1. **Vérifie** que la suite est bien définie : montre par récurrence que le dénominateur ne s'annule jamais.

2. **Calcule** v_{n+1} avec la définition de (v_n) : remplace u_{n+1} par son expression, puis réduis au même dénominateur.
3. **Reconnais** $v_{n+1} = q\,v_n$ (suite géométrique) ou $v_{n+1} = v_n + r$ (suite arithmétique).
4. **Exprime** v_n en fonction de n, puis **reviens** à u_n en résolvant la relation entre u_n et v_n. Déduis-en la limite.

Une suite auxiliaire en quotient

Exemple : la suite du début

On reprend $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$, avec $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la récurrence qui le prouve est rédigée plus bas, dans l'encadré « Attention »). L'énoncé donne $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

Numérateur et dénominateur. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 2 = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1},$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 1}.$$

Quotient. Donc :

$$v_{n+1} = \frac{2(u_n - 2)}{3(u_n - 1)} = \frac{2}{3}\,v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. Son premier terme vaut $v_0 = \dfrac{1}{2}$, donc $v_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Vérifie : Revenir à la suite de départ

Avec $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$, on sait que $v_n \neq 1$ (en effet $v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n - 1} < 1$, car $u_n > 1$). Comment exprimer u_n en fonction de v_n ?

A. $u_n = \dfrac{1 - v_n}{2 - v_n}$

Faux.

C'est l'inverse : pour $v_0 = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\dfrac{1}{3}$ au lieu de 3.

B. $u_n = 2v_n + 1$

Faux.

Pour $v_0 = \dfrac{1}{2}$, on obtient 2 au lieu de 3.

C. $u_n = \dfrac{2 - v_n}{1 - v_n}$

Juste.

Juste : pour $v_0 = \dfrac{1}{2}$, on retrouve $u_0 = 3$.

D. $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 2$

Faux.

Pour $v_0 = \dfrac{1}{2}$, on obtient 4 au lieu de 3.

Correction

On part de $v_n\,(u_n - 1) = u_n - 2$, soit $v_n\,u_n - v_n = u_n - 2$. On regroupe les termes en u_n :

$$u_n\,(v_n - 1) = v_n - 2.$$

Comme $v_n \neq 1$, on divise par $v_n - 1$:

$$u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{2 - v_n}{1 - v_n}.$$

Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, (v_n) converge vers 0, donc (u_n) converge vers $\dfrac{2-0}{1-0} = 2$.

Attention : un dénominateur à surveiller

✗ « On calcule v_{n+1} sans vérifier que les dénominateurs $u_n + 1$ et $u_n - 1$ sont non nuls. »

✓ On montre d'abord par récurrence que $u_n > 1$. On a $u_0 = 3 > 1$. Si $u_n > 1$, alors $u_n + 1 > 2$, donc $\dfrac{6}{u_n + 1} < 3$ et :

$$u_{n+1} = 4 - \frac{6}{u_n + 1} > 1.$$

Ainsi $u_n + 1 \neq 0$ et $u_n - 1 \neq 0$.

La limite, puis à toi

Exemple : la limite de l'exemple guidé

Dans l'exemple guidé, $v_n = n + \dfrac{1}{2}$ et $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 1 = \frac{1}{v_n} = \frac{2}{2n+1}.$$

Ainsi $u_n = 1 + \dfrac{2}{2n+1}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n+1) = +\infty$, donc $\dfrac{2}{2n+1}$ tend vers 0. La suite (u_n) converge vers 1.

À toi : Une suite homographique

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$. Une récurrence montre que $u_n \geq 0$ pour tout n. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Montre que (v_n) est géométrique, puis trouve la limite de (u_n). Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule séparément $u_{n+1}-1$ et $u_{n+1}+2$, au même dénominateur u_n+4.

Indice 2

Tu dois trouver $u_{n+1}-1=\dfrac{2(u_n-1)}{u_n+4}$ et $u_{n+1}+2=\dfrac{5(u_n+2)}{u_n+4}$.

Indice 3

Point délicat : pour revenir à u_n, isole u_n dans $v_n\,(u_n+2)=u_n-1$, puis passe à la limite.

Réponse

Suite géométrique. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, au dénominateur u_n+4 :

$$u_{n+1}-1=\frac{2(u_n-1)}{u_n+4},$$

$$u_{n+1}+2=\frac{5(u_n+2)}{u_n+4}.$$

Donc $v_{n+1}=\dfrac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)}=\dfrac{2}{5}\,v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $v_0=-\dfrac{1}{2}$.

Terme général. $v_n=-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, qui converge vers 0, car $0<\dfrac{2}{5}<1$.

Retour à u_n. De $v_n\,(u_n+2)=u_n-1$, on tire $u_n\,(1-v_n)=1+2v_n$. Or $v_n=-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n<0$, donc $v_n\neq 1$, et :

$$u_n=\frac{1+2v_n}{1-v_n}.$$

Par quotient, (u_n) converge vers 1.

Remarque : Coin examen : rédiger le calcul de la suite auxiliaire

Dans ce type d'exercice, la suite auxiliaire est donnée et la question annonce le résultat. À l'examen, rédige le calcul en une chaîne d'égalités, puis conclus. Par exemple :

« Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} \\ &= \frac{2(u_n-2)}{3(u_n-1)} \\ &= \frac{2}{3}\,v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{2}$. »

Suites $u_{n+1}=f(u_n)$: convergence et limite

Des termes qui se rapprochent

Devine : Une racine qui se répète

Un indice fictif de satisfaction des clients part de $u_0 = 0$ et se recalcule tous les mois : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$. La calculatrice donne u_1 environ $3{,}464$, u_2 environ $3{,}932$, u_3 environ $3{,}992$ et u_4 environ $3{,}999$. Vers quelle valeur les termes semblent-ils aller ?

A. Vers 12.

Faux.

Les termes restent sous 4 : ils ne montent pas jusqu'à 12.

B. Vers $+\infty$, car la suite est croissante.

Faux.

Croissante ne veut pas dire limite $+\infty$: ces termes restent sous 4.

C. Vers 4.

Juste.

Juste : et $\sqrt{4 + 12} = 4$; le nombre 4 ne bouge pas.

D. Vers $\sqrt{12}$, la valeur de u_1.

Faux.

Les termes dépassent déjà u_1 au rang 2.

Correction

Les termes augmentent et se rapprochent de 4.

Le nombre 4 est particulier : $\sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$. Si la suite part de 4, elle ne bouge plus. Les deux résultats qui suivent expliquent ce rôle.

Théorème : Limite de (f(uₙ)) par continuité

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel ℓ, et f une fonction définie sur un intervalle I qui contient ℓ et tous les termes u_n. Si f est continue en ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Remarque

Ce résultat est admis. Il demande la continuité de f en la limite ℓ : c'est elle qui permet de passer à la limite.

Exemple : l'image d'une suite convergente

Soit $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (u_n) converge vers 2.

- La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ est continue en 2. D'après la limite par continuité, $(u_n^2 + 1)$ converge vers $f(2) = 5$.

- La fonction racine carrée est continue en 2, et les termes u_n sont positifs. Donc $(\sqrt{u_n})$ converge vers $\sqrt{2}$.

La limite est un point fixe

Théorème : Suite récurrente : limite et point fixe

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
- Si (u_n) converge vers un réel ℓ qui appartient à I, alors $f(\ell) = \ell$: la limite est une solution, dans I, de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration

Idée de la preuve. Premier point, par récurrence : $u_0 \in I$; si $u_n \in I$ pour un entier n, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ appartient à $f(I)$, donc à I. Second point : la suite (u_{n+1}) a la même limite ℓ que (u_n), ce qui est admis ici. D'après la limite de $(f(u_n))$ par continuité, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ pour tout n ; la limite étant unique, $f(\ell) = \ell$.

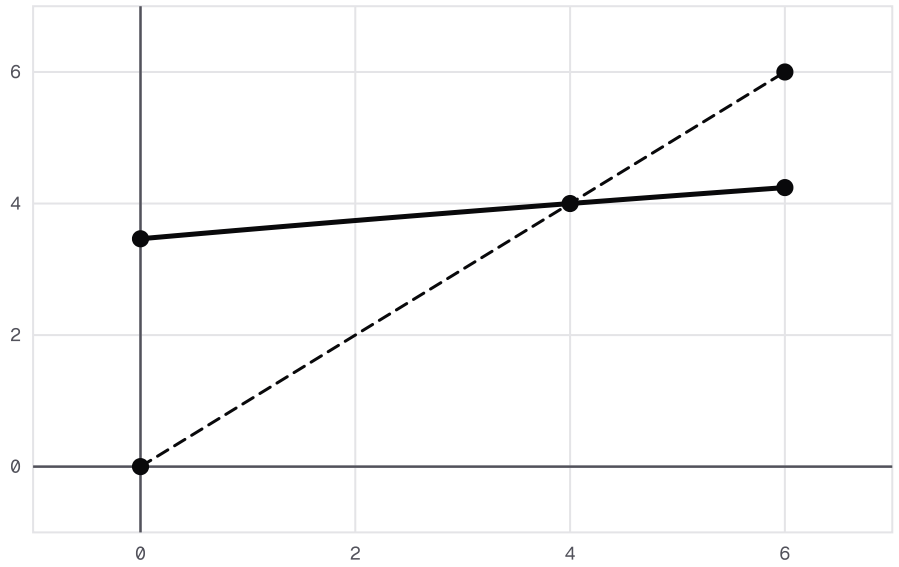
Exemple : la seule limite possible

On reprend $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$, avec $f : x \mapsto \sqrt{x + 12}$ et $I = [0; 4]$.

Stabilité. La fonction f est continue et croissante sur I, avec $f(0) = \sqrt{12}$ et $f(4) = 4$. Donc $f(I) = [\sqrt{12}; 4]$, inclus dans I.

Limite possible. Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $\ell = \sqrt{\ell + 12}$, donc $\ell^2 = \ell + 12$, soit $\ell = 4$ ou $\ell = -3$.

Comme $\ell \in [0; 4]$, la seule limite possible est 4.



La courbe de f et la droite d'équation y = x : elles se coupent au point d'abscisse 4.

La méthode et un piège

Méthode : étudier une suite récurrente

1. **Stabilité** : si l'énoncé ne donne pas I, cherche-le avec les variations de f ; sinon vérifie que $f(I) \subset I$. Montre par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n.
2. **Monotonie** : étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si f est croissante sur I, compare u_0 et u_1, puis raisonne par récurrence.
3. **Convergence** : une suite croissante et majorée, ou décroissante et minorée, converge.
4. **Limite** : si $I = [\alpha; \beta]$, l'encadrement $\alpha \leq u_n \leq \beta$ passe à la limite : $\alpha \leq \ell \leq \beta$, donc $\ell \in I$. Comme f est continue sur I, $f(\ell) = \ell$. Résous $f(x) = x$, et garde la solution qui appartient à I.

Attention : l'équation ne prouve pas la convergence

✗ « L'équation $x^2 = x$ a pour solutions 0 et 1, donc la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2$ converge vers 0 ou 1. »

✓ Les termes valent $2, 4, 16, 256$: la suite a pour limite $+\infty$. L'équation $f(x) = x$ donne seulement les limites **possibles**. Il faut d'abord prouver la convergence.

Vérifie : Prouver la croissance

Pour $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$, comment justifier que (u_n) est croissante ?

A. Il suffit de vérifier que $u_1 > u_0$.

Faux.

Deux termes ne suffisent pas : il faut une preuve pour tout n.

B. Par récurrence : $u_n \leq u_{n+1}$, car f est croissante.

Juste.

Juste : si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$.

C. Il suffit de savoir que $u_n \leq 4$.

Faux.

Une suite majorée par 4 peut décroître, ou osciller.

D. Il suffit de savoir que $f(4) = 4$.

Faux.

Le point fixe donne la limite possible, pas le sens de variation.

Correction

Montrons par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{12}$, donc $u_0 \leq u_1$.

Hérédité : soit n un entier naturel tel que $u_n \leq u_{n+1}$. Alors $u_n + 12 \leq u_{n+1} + 12$. La racine carrée conserve l'ordre des réels positifs, donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Conclusion : la suite est croissante. Majorée par 4, elle converge, et sa limite vaut 4.

Une étude complète, puis à toi

Vérifie : La bonne solution

Soit $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$. On sait que $6 \leq u_n \leq 8$ pour tout n, et que (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ell^2 = 5\ell + 6$. Cette équation a deux solutions, 6 et -1. Pourquoi retient-on 6 ?

A. Parce que la limite appartient à $[6; 8]$.

Juste.

Juste : les inégalités $6 \leq u_n \leq 8$ passent à la limite, donc $6 \leq \ell \leq 8$.

B. Parce que c'est la plus grande des deux solutions.

Faux.

Ce critère est faux en général : seule l'appartenance à $[6; 8]$ compte.

C. Parce que -1 n'est pas solution de l'équation.

Faux.

-1 est bien solution : $(-1)^2 = 1 = 5 \times (-1) + 6$.

D. Parce qu'une limite est toujours positive.

Faux.

Une limite peut être négative : $-2 + \dfrac{1}{n+1}$ converge vers -2.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6 \leq u_n \leq 8$; par passage à la limite dans ces inégalités, $6 \leq \ell \leq 8$, donc $\ell \in [6;8]$.

Or $-1 \notin [6;8]$, donc $\ell = 6$. Ce n'est pas parce que 6 est la plus grande solution : seule l'appartenance à l'intervalle décide.

Exemple : une étude complète

Soit $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$, avec $f(x) = \sqrt{5x+6}$ pour tout $x \geq 0$, et $I = [6;8]$.

Stabilité. La fonction f est continue et croissante sur I, $f(6) = 6$ et $f(8) = \sqrt{46}$, avec $\sqrt{46} < 8$. Donc $f(I) \subset I$ et, par récurrence, $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Monotonie. On a $u_1 = \sqrt{46} < u_0$. Comme f est croissante sur I, une récurrence donne $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 6, donc elle converge vers un réel ℓ.

Limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6 \leq u_n \leq 8$; par passage à la limite, $6 \leq \ell \leq 8$, donc $\ell \in I$. Comme f est continue sur I, $f(\ell) = \ell$, soit $\ell^2 = 5\ell + 6$. Donc $\ell = 6$ ou $\ell = -1$. Comme $-1 \notin I$, on conclut : $\ell = 6$.

À toi : Une étude à mener

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4}{5}$, avec $f(x) = \dfrac{x^2+4}{5}$ et $I = [1;2]$. Montre que $f(I) \subset I$ et que (u_n) est décroissante, puis trouve sa limite. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Suis les quatre points de la méthode : stabilité, monotonie, convergence, limite.

Indice 2

La fonction f est croissante sur I, $f(1) = 1$ et $f(2) = \dfrac{8}{5}$; compare ensuite u_1 et u_0.

Indice 3

Point délicat : l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$ a deux solutions ; garde celle qui appartient à I.

Réponse

Stabilité. La fonction f est continue et croissante sur I, $f(1) = 1$ et $f(2) = \dfrac{8}{5}$, donc $f(I) = \left[1; \dfrac{8}{5}\right] \subset I$. Par récurrence, $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Monotonie. On a $u_1 = \dfrac{8}{5} < u_0$. Comme f est croissante sur I, une récurrence donne $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence. Décroissante et minorée par 1, la suite converge vers un réel ℓ.

Limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$; par passage à la limite, $1 \leq \ell \leq 2$, donc $\ell \in I$. Comme f est continue sur I, $f(\ell) = \ell$, ce qui donne :

$$\ell^2 - 5\ell + 4 = 0.$$

Donc $\ell = 1$ ou $\ell = 4$. Comme $4 \notin I$, on conclut : $\ell = 1$.

Remarque : Coin examen : rédiger le passage à la limite

À l'examen, le passage à la limite nomme l'encadrement des termes et la continuité de f. Par exemple :

« La fonction $f : x \mapsto \sqrt{5x+6}$ est continue sur $I = [6;8]$, $f(I) \subset I$, et (u_n) converge vers ℓ.

Comme $6 \leq u_n \leq 8$ pour tout n, on a $6 \leq \ell \leq 8$, donc $\ell \in I$.

Enfin, f étant continue en ℓ, on a $f(\ell) = \ell$, soit $\ell^2 = 5\ell + 6$. Les solutions sont 6 et -1 ; comme $\ell \in [6;8]$, on a $\ell = 6$. »

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Monotonie** : signe de $u_{n+1} - u_n$, ou variations de f si $u_n = f(n)$.
- **Encadrement** : récurrence, avec initialisation et hérédité.
- **Suites arithmétiques et géométriques** : terme général, nombre de termes $n - p + 1$, somme.
- **Situation économique** : ajout constant ou coefficient multiplicateur, puis seuil à la calculatrice.
- **Limite** : suites de référence, puissances q^n, opérations, comparaison, encadrement.
- **Convergence** : une suite monotone et bornée converge.
- **Suite affine** : $v_n = u_n - \ell$, avec $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. **Suite homographique** : la suite auxiliaire donnée.
- **Suite récurrente** : stabilité, monotonie, convergence, puis $f(\ell) = \ell$ dans I.

Le mot du prof. Tu sais maintenant suivre un capital, une population ou un stock dans le temps, et prédire où il va.

Le Résumé du chapitre rassemble ces méthodes. Les exercices, de l'application au niveau examen, te font pratiquer chaque question type.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Suites numériques » (2bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)