BURHAN

Résumé : Fonctions primitives

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-primitives/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions primitives	Semestre 1

Primitive d'une fonction

> **À retenir : Remonter de la dérivée à la fonction**
>
> Chercher une primitive, c'est parcourir la dérivation à l'envers. On connaît la dérivée ; on cherche la fonction. En économie, on remonte ainsi du coût marginal au coût total. Une seule règle de contrôle vaut pour tout le chapitre : dérive ta réponse.

Définition : Primitive d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que, pour tout x de I,

$$F'(x) = f(x).$$

Chercher une primitive de f, c'est donc chercher une fonction dont la dérivée est f.

Théorème : Existence des primitives d'une fonction continue

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Remarque : Une existence admise

Ce résultat est admis. Il garantit qu'une primitive existe, sans dire comment l'écrire. Les formules du chapitre en donnent une pour les fonctions usuelles et leurs combinaisons.

Méthode : vérifier qu'une fonction est une primitive

1. **Annonce** l'intervalle I sur lequel tu travailles.
2. **Dérive** la fonction F proposée sur I, avec les règles de dérivation.
3. **Compare** $F'(x)$ et $f(x)$ pour tout x de I.
4. **Conclus** : en cas d'égalité, F est une primitive de f sur I ; sinon, ce n'en est pas une.

Exemple

Énoncé. Soit f et F définies sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ et $F(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$. Vérifie que F est une primitive de f sur cet intervalle.

Dérivée. D'après la dérivée d'un quotient, pour tout $x>-1$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $]-1;+\infty[$, $F'(x)=f(x)$: F est une primitive de f sur cet intervalle.

Toutes les primitives d'une fonction

Propriété : Ensemble des primitives d'une fonction

Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.

- Pour tout réel k, la fonction $x\mapsto F(x)+k$ est une primitive de f sur I.
- Réciproquement, toute primitive G de f sur I s'écrit $G(x)=F(x)+k$ pour un réel k, pour tout x de I .

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent donc d'une **constante**.

Exemple

Énoncé. Donne toutes les primitives de $x\mapsto 8x^3+2x$ sur $\mathbb{R}$.

Une primitive. La fonction $x\mapsto 2x^4+x^2$ convient : pour tout réel x, sa dérivée vaut $8x^3+2x$.

Toutes. D'après l'ensemble des primitives, ce sont les fonctions $x\mapsto 2x^4+x^2+k$, où k est un réel.

Attention : Écris « une primitive »

Sur un intervalle, f possède autant de primitives que de réels k. Dis donc « une primitive de f sur I ». L'article « la » n'est permis que si une condition, comme $F(2)=5$, choisit l'une d'elles.

Attention : Un intervalle, pas une réunion

La fonction $x\mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ n'est pas définie en 2. Travaille sur $]-\infty;2[$ ou sur $]2;+\infty[$, jamais sur leur réunion. Sur chacun de ces deux intervalles, la constante peut prendre une valeur différente.

Exemple : Lire les variations d'une primitive

Comme $F' = f$, le signe de f donne le sens de variation de F. Soit F une primitive de $x \mapsto 3 - x$ sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $F'(x) = 3 - x$.

À gauche de 3. $F'(x) = 3 - x$ est strictement positive sur $]-\infty ; 3[$, donc F est strictement croissante sur $]-\infty ; 3]$.

À droite de 3. $F'(x) = 3 - x$ est strictement négative sur $]3 ; +\infty[$, donc F est strictement décroissante sur $[3 ; +\infty[$.

Primitives des fonctions usuelles

Propriété : Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est une primitive de f sur l'intervalle indiqué ; k est un réel et n un entier naturel.

- $f(x) = k$: $F(x) = kx$, sur $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^n$: $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, sur $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$: $F(x) = -\dfrac{1}{x}$, sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, avec $n \geq 2$: $F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$, sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$: $F(x) = 2\sqrt{x}$, sur $]0 ; +\infty[$.

Constante k, sur $\mathbb{R}$

k a pour primitive kx

Puissance, n entier naturel, sur $\mathbb{R}$

x^n a pour primitive $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Inverse du carré, sur chaque intervalle sans 0

$\dfrac{1}{x^2}$ a pour primitive $-\dfrac{1}{x}$

Inverse d'une puissance, n au moins 2, sans 0

$\dfrac{1}{x^n}$ a pour primitive $-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$

Inverse de la racine carrée, x strictement positif

$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a pour primitive $2\sqrt{x}$

Exemple

Puissance. Sur $\mathbb{R}$, une primitive de $x \mapsto x^8$ est $x \mapsto \dfrac{x^9}{9}$.

Inverse d'une puissance. Sur $]0 ; +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^8}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{7x^7}$.

Contrôle. Pour tout $x > 0$, on écrit $-\dfrac{1}{7x^7} = -\dfrac{1}{7}\,x^{-7}$. Sa dérivée vaut $-\dfrac{1}{7} \times (-7)\,x^{-8} = \dfrac{1}{x^8}$.

Exemple

Sur $]0;+\infty[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 8\sqrt{x}$.

Contrôle. $(8\sqrt{x})' = 8 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$. L'intervalle exclut 0, où $\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie (et où $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable).

Attention : L'inverse n'est pas une puissance comme les autres

Pour $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, la formule des puissances diviserait par $n+1=0$. Cette fonction est continue sur $]0;+\infty[$: elle y admet donc des primitives. Le tableau ne les fournit pas ; un chapitre suivant s'en chargera.

Somme et produit par un réel

Propriété : Primitive d'une somme et du produit par un réel

Soit F et G des primitives respectives de f et de g sur un intervalle I, et α un réel. Alors, sur I :

- $F+G$ est une primitive de $f+g$;
- αF est une primitive de αf.

Méthode : primitive d'une somme ou d'un polynôme

1. **Découpe** f en termes du tableau, chacun avec son coefficient réel. Développe d'abord un produit.
2. **Écris** une primitive de chaque terme en gardant le coefficient.
3. **Additionne** ces primitives : une seule constante suffit pour toute la somme.
4. **Dérive** le résultat pour le contrôler.

Exemple

Énoncé. Détermine une primitive de $x \mapsto 5x^4 - 2x^3 + 7$ sur $\mathbb{R}$.

Terme à terme. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = x^5 - \dfrac{x^4}{2} + 7x$.

Contrôle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 5x^4 - \frac{4x^3}{2} + 7 \\ &= 5x^4 - 2x^3 + 7. \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Détermine une primitive de $x \mapsto 2x - \dfrac{3}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.

Terme à terme. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$. Le terme $-\dfrac{3}{x^2}$ donne donc $-3 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3}{x}$, et la fonction G définie par $G(x) = x^2 + \dfrac{3}{x}$ convient.

Contrôle. $G'(x) = 2x - \dfrac{3}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Attention : Aucune règle pour un produit

Pour $x \mapsto x^3(x-2)$, multiplier une primitive de x^3 par une primitive de $x-2$ donne un résultat faux. Développe d'abord : $x^3(x-2) = x^4 - 2x^3$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est alors $x \mapsto \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2}$.

Formes composées

Propriété : Primitives des formes composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel. Sur I :

- $u'u^n$ admet pour primitive $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$;
- si u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\dfrac{1}{u}$ et, pour $n \geq 2$, $\dfrac{u'}{u^n}$ admet pour primitive $-\dfrac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$;
- si $u(x) > 0$ pour tout x de I, $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $2\sqrt{u}$.

De plus, si F est une primitive de f sur un intervalle J et si $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{a}\,F(ax+b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$ sur tout intervalle où $ax+b$ reste dans J.

Puissance de u

$$u'u^n \text{ a pour primitive } \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

Inverse du carré de u, u non nulle

$$\frac{u'}{u^2} \text{ a pour primitive } -\frac{1}{u}$$

Inverse d'une puissance de u, n au moins 2, u non nulle

$$\frac{u'}{u^n} \text{ a pour primitive } -\frac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$$

Racine de u, u strictement positive

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ a pour primitive } 2\sqrt{u}$$

Expression affine, a non nul, F primitive de f, ax + b dans l'intervalle de F

$$f(ax+b) \text{ a pour primitive } \frac{F(ax+b)}{a}$$

Méthode : reconnaître une forme composée

1. **Repère** u : l'expression élevée à une puissance, placée au dénominateur ou sous la racine. Calcule u'.
2. **Ajuste** : si f vaut c fois la forme, avec c constant, écris-le. Si le facteur manquant dépend de x, développe.
3. **Vérifie** la condition sur u : non nulle sur I, ou strictement positive pour la racine.
4. **Applique** la formule multipliée par c, puis dérive pour contrôler.

Exemple

Énoncé. Détermine une primitive de $x \mapsto x(x^2+7)^3$ sur $\mathbb{R}$.

Forme. Avec $u(x) = x^2+7$, on a $u'(x) = 2x$: la fonction vaut $\dfrac{1}{2}\,u'u^3$.

Primitive. Sur $\mathbb{R}$, on obtient la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+7)^4}{4} \\ &= \frac{(x^2+7)^4}{8}. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{4 \times 2x\,(x^2+7)^3}{8} \\ &= x(x^2+7)^3. \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Détermine une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{(3x+2)^2}$ sur $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$.

Forme. Avec $u(x) = 3x+2$, non nulle sur cet intervalle, $u'(x) = 3$: la fonction vaut $\dfrac{u'}{u^2}$.

Primitive. La fonction G définie par $G(x) = -\dfrac{1}{3x+2}$ convient.

Contrôle. Pour tout $x > -\dfrac{2}{3}$, $G'(x) = \dfrac{3}{(3x+2)^2}$.

Exemple

Énoncé. Détermine une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$ sur $\mathbb{R}$.

Forme. Avec $u(x) = x^2+4$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a $u'(x) = 2x$: la fonction vaut $\dfrac{3}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Primitive. Sur $\mathbb{R}$, on obtient la fonction H définie par :

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{3}{2} \times 2\sqrt{x^2+4} \\ &= 3\sqrt{x^2+4}. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout réel x, $H'(x) = 3 \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$.

Exemple

Énoncé. Détermine une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(5x-1)^3}$ sur $\left]\dfrac{1}{5}; +\infty\right[$.

Forme. Pour $x > \dfrac{1}{5}$, on a $5x-1>0$. C'est $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ évaluée en $5x-1$, avec $a=5$. Sur $]0;+\infty[$, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{2t^2}$.

Primitive. On obtient la fonction P définie par :

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{2(5x-1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{10(5x-1)^2}. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout $x > \dfrac{1}{5}$, $P'(x) = \dfrac{2 \times 5}{10(5x-1)^3} = \dfrac{1}{(5x-1)^3}$.

Attention : Le facteur u' doit être présent

Pour $(2x+5)^3$, on a $u'(x)=2$: une primitive est $\dfrac{(2x+5)^4}{8}$, et non $\dfrac{(2x+5)^4}{4}$. Si le facteur absent dépend de x, comme pour $(x^2-2)^2$, aucune constante ne le remplace. Développe en x^4-4x^2+4, puis prends $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{4x^3}{3} + 4x$.

Condition initiale et grandeurs économiques

Propriété : Primitive vérifiant une condition initiale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel de I et y_0 un réel. Il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Méthode : la primitive qui vérifie une condition

1. **Trouve** une primitive G de f sur I.
2. **Pose** $F(x) = G(x) + k$, avec k réel inconnu.
3. **Remplace** x par x_0 : l'égalité $G(x_0) + k = y_0$ donne k.
4. **Écris** F avec cette valeur, puis vérifie que $F(x_0) = y_0$.

Exemple

Énoncé. Détermine la primitive F de $x \mapsto 6x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(2) = 3$.

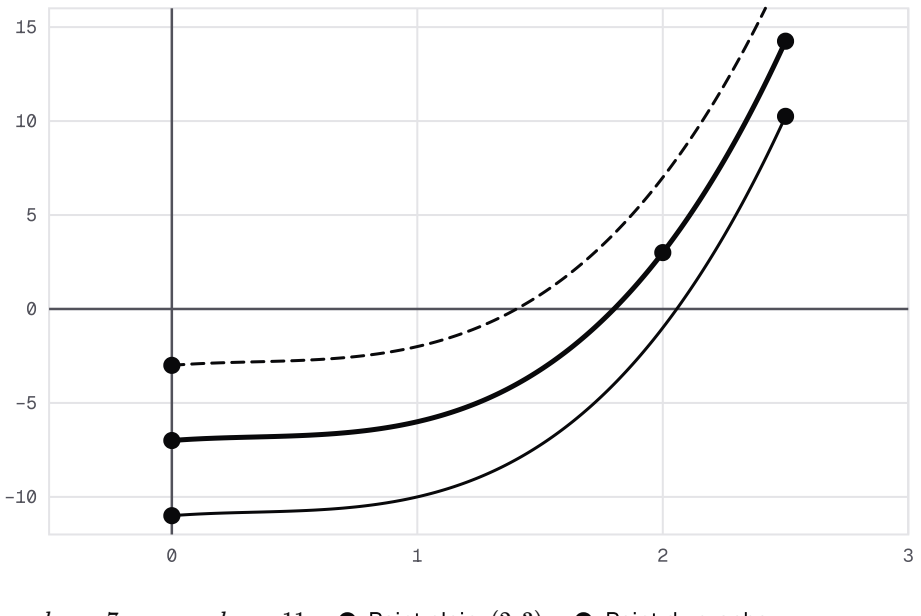
Forme générale. Il existe un réel k tel que, pour tout réel x, $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + k$.

Condition. $F(2) = 2 \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 2 + k$, soit $F(2) = 16 - 8 + 2 + k = 10 + k$. L'équation $10 + k = 3$ donne $k = -7$.

Résultat. Pour tout réel x, $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 7$.

Remarque : Ce que dit le graphique

Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante : leurs courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale. La condition $F(x_0) = y_0$ retient la seule courbe passant par le point de coordonnées $(x_0 ; y_0)$.



Primitives de x ↦ 6x² - 4x + 1 : la condition F(2) = 3 retient la courbe obtenue pour k = -7.

Méthode : d'une grandeur marginale à la grandeur totale

1. **Nomme** la donnée : coût marginal $C'(q)$ ou recette marginale $R'(q)$.
2. **Cherche** une primitive sur l'intervalle des quantités étudiées.
3. **Fixe** la constante avec une valeur connue : les coûts fixes $C(0)$, ou une recette nulle pour $q = 0$.
4. **Réponds** par une phrase, avec l'unité en toutes lettres. Les données de ces énoncés sont fictives.

Lorsque le prix de vente unitaire est fixe, la recette totale est ce prix multiplié par la quantité vendue. Le bénéfice est la recette totale moins le coût total.

Exemple

Données fictives. Une savonnerie produit q centaines de savons, avec $0 \leq q \leq 6$. Son coût marginal vaut $C'(q) = 6q + 10$, en milliers de dirhams par centaine de savons. Ses coûts fixes valent 8 milliers de dirhams.

Coût total. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $[0; 6]$, il existe un réel k tel que $C(q) = 3q^2 + 10q + k$. Or $C(0) = k = 8$. Donc $C(q) = 3q^2 + 10q + 8$.

Interprétation. $C(3) = 3 \times 3^2 + 10 \times 3 + 8$, soit $C(3) = 27 + 30 + 8 = 65$: produire 300 savons coûte 65 milliers de dirhams.

Attention : Les coûts fixes ne disparaissent pas

Oublier la constante revient à supposer $C(0) = 0$, donc des coûts fixes nuls. Pour la savonnerie, on trouverait $C(3) = 57$ au lieu de 65 : il manque exactement les coûts fixes.

Quelle méthode pour quelle forme ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle forme ?

- **Vérifier** une primitive proposée : dérive-la sur l'intervalle, puis compare.
- **Somme ou polynôme** : terme à terme, avec le tableau des primitives usuelles.
- **Puissance, quotient ou racine d'une expression** : repère u et u', puis ajuste le coefficient constant.
- **Expression en** $ax + b$: primitive usuelle évaluée en $ax + b$, divisée par a.
- **Produit sans facteur** u' : développe d'abord.
- **Condition** $F(x_0) = y_0$: forme générale, puis équation d'inconnue k.
- **Coût ou recette marginal** : primitive, puis coûts fixes ou recette nulle en $q = 0$.

À retenir : Rédiger en devoir

Annonce toujours l'intervalle de travail. Écris « une primitive », sauf si une condition la fixe. Contrôle chaque résultat en dérivant. Pour un sens de variation, nomme le signe de $F' = f$ et l'intervalle. En économie, donne l'unité en toutes lettres.