BURHAN

Fonctions primitives : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Niveau examen	5

Exercice 1 — 4 pts

Une primitive, ses variations et son minimum

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$.

1. — 1 pts

Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=x+\dfrac{4}{x}$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : dérive F et compare avec f. **Début :** la dérivée de $\dfrac{1}{x}$ est $-\dfrac{1}{x^2}$.

2. — 1 pts

Vérifier que, pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$. Montrer que $f(x)<0$ sur $]0;2[$ et $f(x)>0$ sur $]2;+\infty[$.

INDICE

Début : réduis $1-\dfrac{4}{x^2}$ au même dénominateur. **Ensuite :** pour $x>0$, quel est le signe de $x+2$ et de x^2 ?

3. — 1,5 pts

En déduire que F est strictement décroissante sur $]0;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$, puis montrer que $F(x)\geq 4$ pour tout $x>0$.

INDICE

Outil : $F'=f$. **Point délicat :** F change de sens de variation en 2 ; que vaut $F(2)$ comparé aux autres valeurs ?

4. — 0,5 pts

Déterminer la primitive G de f sur $]0;+\infty[$ telle que $G(2)=0$, et vérifier que $G(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x}$.

INDICE

Outil : $G(x)=F(x)+k$. **Début :** utilise la valeur $F(2)$ de la question 3.

Exercice 2 — 3,5 pts

Le coût total d'une fabrique de jus

Données fictives. Une fabrique de jus produit q milliers de litres par semaine, avec $0 \leq q \leq 10$. Son coût marginal, en milliers de dirhams par millier de litres, vaut $C'(q) = 3q^2 - 24q + 60$. Ses coûts fixes s'élèvent à 50 milliers de dirhams.

1. — 1 pts

Montrer que le coût total est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 50$ pour tout q de $[0; 10]$.

INDICE

Outil : C est une primitive de C' ; les coûts fixes valent $C(0)$.

2. — 1 pts

Vérifier que $C'(q) = 3(q-4)^2 + 12$, puis montrer que C est strictement croissante sur $[0; 10]$.

INDICE

Début : développe $3(q-4)^2$. **Ensuite :** un carré est positif ou nul.

3. — 0,5 pts

Vérifier que $C(5) = 175$, puis interpréter ce résultat.

INDICE

Début : remplace q par 5 dans $C(q)$.

4. — 1 pts

Chaque millier de litres est vendu 39 milliers de dirhams. Le bénéfice est la recette moins le coût total. Montrer que le bénéfice pour $q = 5$ vaut 20 milliers de dirhams.

INDICE

Outil : la recette vaut le prix unitaire fois la quantité. **Début :** utilise $C(5)$ de la question 3.

Exercice 3 — 4 pts

Une forme composée au carré du dénominateur

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x+5)^2}$.

1. — 0,5 pts

Vérifier que $x^2-2x+5 = (x-1)^2+4$ pour tout réel x, et en déduire que $x^2-2x+5 \geq 4$.

INDICE

Début : développe $(x-1)^2$.

2. — 1 pts

Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2-2x+5)}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$. **Point délicat :** avec $u(x) = x^2-2x+5$, compare $u'(x)$ et $x-1$.

3. — 1 pts

Montrer que F est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

INDICE

Outil : $F' = f$. **Début :** le dénominateur de $f(x)$ est strictement positif.

4. — 1,5 pts

Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(1) = 0$, puis vérifier que $G(x) = \dfrac{(x-1)^2}{8(x^2-2x+5)}$.

INDICE

Début : calcule $F(1)$; on a $1-2+5 = 4$. **Ensuite :** réduis au dénominateur $8(x^2-2x+5)$; on trouve $x^2-2x+5-4$ au numérateur.

Exercice 4 3,5 pts

La recette totale d'une boulangerie

Données fictives. Une boulangerie vend q centaines de pains par jour, avec $0 \leq q \leq 12$. Sa recette marginale, en centaines de dirhams par centaine de pains, vaut $R'(q) = \dfrac{40}{\sqrt{q+4}}$. La recette est nulle quand rien n'est vendu : $R(0) = 0$.

1. 0,5 pts

On pose $u(q) = q + 4$. Vérifier que $u(q) > 0$ sur $[0;12]$ et que $R'(q) = 40 \times \dfrac{u'(q)}{\sqrt{u(q)}}$.

INDICE

Début : calcule $u'(q)$.

2. 1,5 pts

Montrer que $R(q) = 80\sqrt{q+4} - 160$ pour tout q de $[0;12]$.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. **Ensuite :** utilise $R(0) = 0$ et $\sqrt{4} = 2$.

3. 1 pts

Vérifier que $R(5) = 80$ et $R(12) = 160$, puis interpréter $R(5)$.

INDICE

Début : $5 + 4 = 9$ et $12 + 4 = 16$ sont des carrés.

4. 0,5 pts

Montrer que la recette totale R est strictement croissante sur $[0;12]$.

INDICE

Outil : le signe de R' donne le sens de variation de R.

Exercice 5 4 pts

Une primitive qui s'écrit comme un carré

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$.

1. 0,5 pts

Vérifier que $f(x) = 4x(x-1)(x-2)$ pour tout réel x.

INDICE

Début : développe d'abord $(x-1)(x-2)$.

2. 1 pts

Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis vérifier que $F(x) = x^2(x-2)^2$.

INDICE

Outil : dérive F terme à terme. **Point délicat :** mets x^2 en facteur dans $F(x)$, puis reconnais une identité remarquable.

3. 1,5 pts

Montrer que F est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[1 ; 2]$, et strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et sur $[2 ; +\infty[$.

INDICE

Outil : $F' = f$; dresse le tableau de signes des facteurs $4x$, $x-1$ et $x-2$.

4. 1 pts

Montrer que la primitive H de f sur $\mathbb{R}$ telle que $H(1) = 0$ est définie par $H(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$.

INDICE

Outil : $H(x) = F(x) + k$. **Début :** calcule $F(1)$ avec la question 2.