BURHAN

Fonctions primitives : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Une primitive, ses variations et son minimum

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$.

1. 1 pts

Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=x+\dfrac{4}{x}$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : dérive F et compare avec f. **Début :** la dérivée de $\dfrac{1}{x}$ est $-\dfrac{1}{x^2}$.

CORRIGÉ

Contrôle en dérivant. La fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1+4\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= 1-\frac{4}{x^2}\\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x>0$, $F'(x)=f(x)$: la fonction F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$. Montrer que $f(x)<0$ sur $]0;2[$ et $f(x)>0$ sur $]2;+\infty[$.

INDICE

Début : réduis $1-\dfrac{4}{x^2}$ au même dénominateur. **Ensuite :** pour $x>0$, quel est le signe de $x+2$ et de x^2 ?

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout $x>0$, on réduit au même dénominateur, puis on factorise $x^2-4=(x-2)(x+2)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-4}{x^2}\\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x>0$, on a $x+2>0$ et $x^2>0$: $f(x)$ a le signe de $x-2$.

- Si $0<x<2$, alors $x-2<0$, donc $f(x)<0$.
- Si $x>2$, alors $x-2>0$, donc $f(x)>0$.

Conclusion. Pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$. De plus $f(x)<0$ sur $]0;2[$ et $f(x)>0$ sur $]2;+\infty[$.

3. 1,5 pts

En déduire que F est strictement décroissante sur $]0;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$, puis montrer que $F(x) \geq 4$ pour tout $x > 0$.

INDICE

Outil : $F' = f$. **Point délicat :** F change de sens de variation en 2 ; que vaut $F(2)$ comparé aux autres valeurs ?

CORRIGÉ

Variations. On a $F' = f$ sur $]0;+\infty[$. F' est strictement négative sur $]0;2[$, donc F est strictement décroissante sur $]0;2]$. F' est strictement positive sur $]2;+\infty[$, donc F est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

Minimum. Soit $x > 0$.

- Si $0 < x \leq 2$: F est décroissante sur $]0;2]$, donc $F(x) \geq F(2)$.
- Si $x \geq 2$: F est croissante sur $[2;+\infty[$, donc $F(x) \geq F(2)$.

Or $F(2) = 2 + \dfrac{4}{2} = 4$.

Conclusion. F est strictement décroissante sur $]0;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$; pour tout $x > 0$, $F(x) \geq 4$.

4. 0,5 pts

Déterminer la primitive G de f sur $]0;+\infty[$ telle que $G(2) = 0$, et vérifier que $G(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x}$.

INDICE

Outil : $G(x) = F(x) + k$. **Début :** utilise la valeur $F(2)$ de la question 3.

CORRIGÉ

Constante. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $]0;+\infty[$, il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x > 0$. D'après la question 3, $F(2) = 4$, donc $G(2) = 4 + k$. La condition $G(2) = 0$ donne $k = -4$.

Écriture. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} G(x) &= x + \frac{4}{x} - 4 \\ &= \frac{x^2 - 4x + 4}{x} \\ &= \frac{(x-2)^2}{x}. \end{aligned}$$

Contrôle. On a $G' = F' = f$ sur $]0;+\infty[$, et $G(2) = \dfrac{0}{2} = 0$.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = x + \dfrac{4}{x} - 4$; pour tout $x > 0$, $G(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x}$.

Exercice 2 3,5 pts

Le coût total d'une fabrique de jus

Données fictives. Une fabrique de jus produit q milliers de litres par semaine, avec $0 \leq q \leq 10$. Son coût marginal, en milliers de dirhams par millier de litres, vaut $C'(q) = 3q^2 - 24q + 60$. Ses coûts fixes s'élèvent à 50 milliers de dirhams.

1. 1 pts

Montrer que le coût total est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 50$ pour tout q de $[0;10]$.

INDICE

Outil : C est une primitive de C' ; les coûts fixes valent $C(0)$.

CORRIGÉ

Primitive. Le coût total C est une primitive de C' sur l'intervalle $[0;10]$. Terme à terme, $3 \times \dfrac{q^3}{3} = q^3$ et $-24 \times \dfrac{q^2}{2} = -12q^2$: la fonction $q \mapsto q^3 - 12q^2 + 60q$ est une autre primitive de C'.

Forme générale. D'après l'ensemble des primitives, il existe un réel k tel que, pour tout q de $[0;10]$:

$$\begin{aligned} C(q) &= q^3 - 12q^2 \\ &\quad + 60q + k. \end{aligned}$$

Coûts fixes. Les coûts fixes sont le coût pour $q = 0$: $C(0) = k = 50$.

Contrôle. Pour tout q de $[0;10]$, $C'(q) = 3q^2 - 24q + 60$, et $C(0) = 50$.

Conclusion. Pour tout q de $[0;10]$, $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 50$.

2. 1 pts

Vérifier que $C'(q) = 3(q-4)^2 + 12$, puis montrer que C est strictement croissante sur $[0;10]$.

INDICE

Début : développe $3(q-4)^2$. **Ensuite :** un carré est positif ou nul.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout q de $[0;10]$:

$$\begin{aligned} &3(q-4)^2 + 12 \\ &= 3(q^2 - 8q + 16) + 12 \\ &= 3q^2 - 24q + 48 + 12 \\ &= 3q^2 - 24q + 60 \\ &= C'(q). \end{aligned}$$

Signe. Un carré est positif ou nul : $3(q-4)^2 \geq 0$, donc $C'(q) \geq 12 > 0$.

Variations. C' est strictement positive sur $[0;10]$, donc C est strictement croissante sur $[0;10]$.

Conclusion. Pour tout q de $[0;10]$, $C'(q) = 3(q-4)^2 + 12$, et le coût total C est strictement croissant sur $[0;10]$.

3. 0,5 pts

Vérifier que $C(5) = 175$, puis interpréter ce résultat.

INDICE

Début : remplace q par 5 dans $C(q)$.

CORRIGÉ

Calcul. On remplace q par 5 :

$$\begin{aligned} C(5) &= 5^3 - 12 \times 5^2 \\ &\quad + 60 \times 5 + 50 \\ &= 125 - 300 + 300 + 50 \\ &= 175. \end{aligned}$$

Interprétation. Produire 5 milliers de litres de jus par semaine coûte 175 milliers de dirhams.

Conclusion. $C(5) = 175$: le coût total de 5 milliers de litres par semaine est de 175 milliers de dirhams.

4. 1 pts

Chaque millier de litres est vendu 39 milliers de dirhams. Le bénéfice est la recette moins le coût total. Montrer que le bénéfice pour $q = 5$ vaut 20 milliers de dirhams.

INDICE

Outil : la recette vaut le prix unitaire fois la quantité. **Début :** utilise $C(5)$ de la question 3.

CORRIGÉ

Recette. La recette vaut le prix unitaire fois la quantité. Pour $q = 5$, elle vaut $39 \times 5 = 195$ milliers de dirhams.

Bénéfice. D'après la question 3, $C(5) = 175$. Le bénéfice vaut donc $195 - C(5) = 195 - 175 = 20$, en milliers de dirhams.

Conclusion. Pour $q = 5$, le bénéfice vaut 20 milliers de dirhams.

Exercice 3 — 4 pts

Une forme composée au carré du dénominateur

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x+5)^2}$.

1. — 0,5 pts

Vérifier que $x^2-2x+5 = (x-1)^2+4$ pour tout réel x, et en déduire que $x^2-2x+5 \geq 4$.

INDICE

Début : développe $(x-1)^2$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-1)^2+4\\&= x^2-2x+1+4\\&= x^2-2x+5.\end{aligned}$$

Minoration. Un carré est positif ou nul : $(x-1)^2 \geq 0$, donc $(x-1)^2+4 \geq 4$.

Conclusion. Pour tout réel x, $x^2-2x+5 = (x-1)^2+4$ et $x^2-2x+5 \geq 4$. En particulier, x^2-2x+5 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. — 1 pts

Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2-2x+5)}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$. **Point délicat :** avec $u(x) = x^2-2x+5$, compare $u'(x)$ et $x-1$.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x^2-2x+5$ pour tout réel x. D'après la question 1, u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On a $u'(x) = 2x-2 = 2(x-1)$, donc $x-1 = \dfrac{1}{2}\,u'(x)$ et :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)^2}.$$

Primitive. Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{u(x)}\right)$, c'est-à-dire la fonction F.

Contrôle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&F'(x)\\&= \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}\\&= \frac{x-1}{(x^2-2x+5)^2}\\&= f(x).\end{aligned}$$

Conclusion. La fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. 1 pts

Montrer que F est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

INDICE

Outil : $F'=f$. **Début :** le dénominateur de $f(x)$ est strictement positif.

CORRIGÉ

Signe de f. Pour tout réel x, $(x^2-2x+5)^2>0$: $f(x)$ a le signe de $x-1$. Donc $f(x)<0$ pour $x<1$ et $f(x)>0$ pour $x>1$.

Variations. On a $F'=f$ sur $\mathbb{R}$. F' est strictement négative sur $]-\infty;1[$, donc F est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$. F' est strictement positive sur $]1;+\infty[$, donc F est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Conclusion. F est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

4. 1,5 pts

Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(1)=0$, puis vérifier que $G(x)=\dfrac{(x-1)^2}{8(x^2-2x+5)}$.

INDICE

Début : calcule $F(1)$; on a $1-2+5=4$. **Ensuite :** réduis au dénominateur $8(x^2-2x+5)$; on trouve $x^2-2x+5-4$ au numérateur.

CORRIGÉ

Constante. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $\mathbb{R}$, il existe un réel k tel que $G(x)=F(x)+k$ pour tout réel x. Comme $1-2+5=4$, on a $F(1)=-\dfrac{1}{2\times 4}=-\dfrac{1}{8}$. La condition $G(1)=0$ s'écrit $-\dfrac{1}{8}+k=0$, d'où $k=\dfrac{1}{8}$.

Écriture. Pour tout réel x, on réduit au dénominateur $8(x^2-2x+5)$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{8}-\frac{1}{2(x^2-2x+5)} \\ &= \frac{x^2-2x+5-4}{8(x^2-2x+5)} \\ &= \frac{(x-1)^2}{8(x^2-2x+5)}. \end{aligned}$$

Contrôle. On a $G'=F'=f$ sur $\mathbb{R}$, et $G(1)=0$ car $(1-1)^2=0$.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=F(x)+\dfrac{1}{8}$; pour tout réel x, $G(x)=\dfrac{(x-1)^2}{8(x^2-2x+5)}$.

Exercice 4 3,5 pts

La recette totale d'une boulangerie

Données fictives. Une boulangerie vend q centaines de pains par jour, avec $0 \leq q \leq 12$. Sa recette marginale, en centaines de dirhams par centaine de pains, vaut $R'(q) = \dfrac{40}{\sqrt{q+4}}$. La recette est nulle quand rien n'est vendu : $R(0) = 0$.

1. 0,5 pts

On pose $u(q) = q + 4$. Vérifier que $u(q) > 0$ sur $[0;12]$ et que $R'(q) = 40 \times \dfrac{u'(q)}{\sqrt{u(q)}}$.

INDICE

Début : calcule $u'(q)$.

CORRIGÉ

Signe. Pour $0 \leq q \leq 12$, on a $u(q) = q + 4 \geq 4$, donc $u(q) > 0$.

Forme. Pour tout q de $[0;12]$, $u'(q) = 1$, donc :

$$40 \times \frac{u'(q)}{\sqrt{u(q)}} = \frac{40}{\sqrt{q+4}}.$$

Conclusion. Pour tout q de $[0;12]$, $u(q) > 0$ et $R'(q) = 40 \times \dfrac{u'(q)}{\sqrt{u(q)}}$.

2. 1,5 pts

Montrer que $R(q) = 80\sqrt{q+4} - 160$ pour tout q de $[0;12]$.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. **Ensuite :** utilise $R(0) = 0$ et $\sqrt{4} = 2$.

CORRIGÉ

Une primitive. Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. D'après la question 1, une primitive de R' sur $[0;12]$ est donc $q \mapsto 40 \times 2\sqrt{q+4}$, soit $q \mapsto 80\sqrt{q+4}$.

Forme générale. La recette totale R est une primitive de R' sur l'intervalle $[0;12]$. D'après l'ensemble des primitives, il existe un réel k tel que, pour tout q de $[0;12]$:

$$R(q) = 80\sqrt{q+4} + k.$$

Condition. On a $R(0) = 80\sqrt{4} + k = 160 + k$. La condition $R(0) = 0$ s'écrit $160 + k = 0$, d'où $k = -160$.

Contrôle. Pour tout q de $[0;12]$, $R'(q) = \dfrac{80}{2\sqrt{q+4}} = \dfrac{40}{\sqrt{q+4}}$, et $R(0) = 160 - 160 = 0$.

Conclusion. Pour tout q de $[0;12]$, $R(q) = 80\sqrt{q+4} - 160$.

3. 1 pts

Vérifier que $R(5) = 80$ et $R(12) = 160$, puis interpréter $R(5)$.

INDICE

Début : $5 + 4 = 9$ et $12 + 4 = 16$ sont des carrés.

CORRIGÉ

Calcul. On a $\sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$. Donc $R(5) = 80 \times 3 - 160 = 80$ et $R(12) = 80 \times 4 - 160 = 160$.

Interprétation. La valeur $q = 5$ correspond à 500 pains vendus par jour. La recette vaut alors 80 centaines de dirhams, soit 8000 dirhams.

Conclusion. $R(5) = 80$ et $R(12) = 160$: pour 500 pains vendus par jour, la recette est de 8000 dirhams.

4. 0,5 pts

Montrer que la recette totale R est strictement croissante sur $[0; 12]$.

INDICE

Outil : le signe de R' donne le sens de variation de R.

CORRIGÉ

Signe de R'. Pour tout q de $[0; 12]$, $\sqrt{q+4} > 0$, donc $R'(q) = \dfrac{40}{\sqrt{q+4}} > 0$.

Conclusion. R' est strictement positive sur $[0; 12]$, donc la recette totale R est strictement croissante sur $[0; 12]$.

Exercice 5 4 pts

Une primitive qui s'écrit comme un carré

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$.

1. 0,5 pts

Vérifier que $f(x) = 4x(x-1)(x-2)$ pour tout réel x.

INDICE

Début : développe d'abord $(x-1)(x-2)$.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, on développe d'abord le produit des deux derniers facteurs :

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} &4x(x-1)(x-2) \\ &= 4x(x^2 - 3x + 2) \\ &= 4x^3 - 12x^2 + 8x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = 4x(x-1)(x-2)$.

2. 1 pts

Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis vérifier que $F(x) = x^2(x-2)^2$.

INDICE

Outil : dérive F terme à terme. **Point délicat :** mets x^2 en facteur dans $F(x)$, puis reconnais une identité remarquable.

CORRIGÉ

Contrôle en dérivant. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 8x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Carré. On met x^2 en facteur, puis on reconnaît l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2(x^2 - 4x + 4) \\ &= x^2(x-2)^2. \end{aligned}$$

Conclusion. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F(x) = x^2(x-2)^2$.

3. 1,5 pts

Montrer que F est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[1;2]$, et strictement croissante sur $[0;1]$ et sur $[2;+\infty[$.

INDICE

Outil : $F'=f$; dresse le tableau de signes des facteurs $4x$, $x-1$ et $x-2$.

CORRIGÉ

Signe de f. D'après la question 1, $f(x)=4x(x-1)(x-2)$. Les facteurs s'annulent en 0, 1 et 2, et leur produit est :

- strictement négatif sur $]-\infty;0[$ (trois facteurs négatifs) ;
- strictement positif sur $]0;1[$ (deux facteurs négatifs) ;
- strictement négatif sur $]1;2[$ (un seul facteur négatif) ;
- strictement positif sur $]2;+\infty[$ (aucun facteur négatif).

Variations. On a $F'=f$ sur $\mathbb{R}$. F' est strictement négative sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;2[$, donc F est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[1;2]$. F' est strictement positive sur $]0;1[$ et sur $]2;+\infty[$, donc F est strictement croissante sur $[0;1]$ et sur $[2;+\infty[$.

Conclusion. F est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[1;2]$, et strictement croissante sur $[0;1]$ et sur $[2;+\infty[$.

4. 1 pts

Montrer que la primitive H de f sur $\mathbb{R}$ telle que $H(1)=0$ est définie par $H(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$.

INDICE

Outil : $H(x)=F(x)+k$. **Début :** calcule $F(1)$ avec la question 2.

CORRIGÉ

Constante. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $\mathbb{R}$, il existe un réel k tel que $H(x)=F(x)+k$ pour tout réel x. D'après la question 2, $F(1)=1^2\times(1-2)^2=1$. La condition $H(1)=0$ s'écrit $1+k=0$, d'où $k=-1$.

Expression. Pour tout réel x, $H(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$.

Contrôle. On a $H'=F'=f$ sur $\mathbb{R}$, et $H(1)=1-4+4-1=0$.

Conclusion. La primitive H de f sur $\mathbb{R}$ telle que $H(1)=0$ est définie par $H(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$.