BURHAN

# Fonctions primitives : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
|---|---|---|
| Fonctions primitives | Entraînement | 7 |

## Exercice 1

### Le coefficient à ajuster

**1.**

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2(x^3+2)^4$.

INDICE

**Outil :** la forme $u'u^n$. **Début :** avec $u(x) = x^3+2$, compare $u'(x)$ et le facteur $x^2$.

**2.**

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (5-2x)^3$.

INDICE

**Outil :** même forme. **Point délicat :** la dérivée de $5-2x$ vaut $-2$ ; le coefficient à placer est négatif.

**3.**

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (2x^2+1)^2$.

INDICE

**Début :** développe le carré. **Point délicat :** la dérivée de $2x^2+1$ est $4x$ ; ce facteur dépend de $x$ et ne peut pas être ajusté par une constante.

**Exercice 2**

## Une racine d'expression au dénominateur

**1.**

Justifier que $x^3+8>0$ pour tout $x$ de $]-2;+\infty[$, puis déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}}$ sur cet intervalle.

INDICE

**Outil :** une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$, si $u>0$. **Début :** la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $(-2)^3=-8$.

**2.**

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$ sur $\left]-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.

INDICE

**Outil :** même forme. **Début :** la dérivée de $2x+5$ vaut $2$ ; écris la fonction comme $\dfrac{1}{2}$ fois la forme.

**3.**

Vérifier que $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$, puis déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

INDICE

**Début :** développe $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$. **Ensuite :** dérive $x^2-x+1$ et compare avec le numérateur.

### Exercice 3

## Primitives d'une fonction usuelle d'une expression affine

**1.**

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (4x-1)^5$.

INDICE

**Outil :** si $F$ est une primitive de $f$, alors $\dfrac{1}{a}F(ax+b)$ est une primitive de $f(ax+b)$. **Début :** ici la fonction usuelle est $t \mapsto t^5$ et $a = 4$.

**2.**

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(3-x)^2}$ sur $]-\infty ; 3[$.

INDICE

**Outil :** même formule, avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$. **Point délicat :** ici $a = -1$, et $3 - x > 0$ sur l'intervalle.

**3.**

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \left(\dfrac{x}{2}+1\right)^3$.

INDICE

**Outil :** même formule, avec $a = \dfrac{1}{2}$. **Point délicat :** diviser par $\dfrac{1}{2}$ revient à multiplier par $2$.

### Exercice 4

## Des sommes qui mêlent les formes

**1.**

Déterminer une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de $x \mapsto 3x^2 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

INDICE

**Outil :** une primitive d'une somme. **Début :** le dernier terme est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x+1$, non nul pour $x > 0$.

**2.**

On admet que $x^2 - 2x + 3 > 0$ pour tout réel $x$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 4x + \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

INDICE

**Outil :** une primitive d'une somme et la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. **Début :** dérive $x^2 - 2x + 3$.

### Exercice 5

## Conditions initiales sur des primitives non polynomiales

**1.**

Déterminer la primitive $F$ de $x \mapsto \dfrac{2}{(2x+1)^2}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ telle que $F(0)=3$.

INDICE

**Outil :** la forme $\dfrac{u'}{u^2}$, puis la condition initiale. **Début :** avec $u(x)=2x+1$, on a $u'(x)=2$.

**2.**

Calculer $F(2)$.

INDICE

**Début :** remplace $x$ par $2$ ; on a $2\times 2+1=5$.

**3.**

Déterminer la primitive $H$ de $x \mapsto 1-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ telle que $H(4)=1$. Vérifier que $H(x)=\left(\sqrt{x}-3\right)^2$.

INDICE

**Outil :** une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$. **Ensuite :** développe $\left(\sqrt{x}-3\right)^2$.

### Exercice 6

## Recette, coût et bénéfice d'une coopérative agricole

**Données fictives.** Une coopérative agricole conditionne $q$ tonnes d'olives par jour, avec $0 \leq q \leq 10$. Les montants sont en milliers de dirhams. La recette marginale vaut $R'(q) = 60 - 6q$ et le coût marginal vaut $C'(q) = 2q + 12$. La recette est nulle quand rien n'est vendu. Les coûts fixes s'élèvent à $40$ milliers de dirhams.

**1.**

Déterminer la recette totale $R(q)$.

INDICE

**Outil :** $R$ est une primitive de $R'$ sur $[0;10]$. **Début :** traduis « recette nulle quand rien n'est vendu » par une égalité.

**2.**

Déterminer le coût total $C(q)$.

INDICE

**Outil :** même méthode. **Point délicat :** les coûts fixes sont le coût pour $q = 0$.

**3. a)**

On appelle bénéfice la différence entre recette et coût : $B(q) = R(q) - C(q)$. Exprimer $B(q)$.

INDICE

**Début :** remplace $R(q)$ et $C(q)$ par les expressions des questions 1 et 2. **Point délicat :** le signe moins porte sur tous les termes de $C(q)$.

**3. b)**

Étudier le sens de variation de $B$ sur $[0;10]$.

INDICE

**Outil :** le signe de $B'$ donne le sens de variation de $B$. **Début :** factorise $B'(q) = -8q + 48$.

**3. c)**

En déduire le bénéfice maximal et la quantité qui le donne.

INDICE

**Point délicat :** $B$ croît puis décroît : où est le maximum ?

### Exercice 7

## Lire les variations d'une primitive sur le signe de la fonction

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 6$, et $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**1.**

Vérifier que $f(x) = (x-3)(x+2)$, puis étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

**Début :** développe $(x-3)(x+2)$. **Ensuite :** un tableau de signes des deux facteurs.

**2.**

En déduire le sens de variation de $F$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

**Outil :** $F' = f$, et le signe de la dérivée donne le sens de variation.

**3.**

Sans calculer $F$, comparer $F(-1)$ et $F(2)$.

INDICE

**Point délicat :** les deux nombres $-1$ et $2$ sont dans un même intervalle où le sens de variation de $F$ est connu.

**4.**

Contrôler ce résultat : vérifier que $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 6x$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer ses valeurs en $-1$ et en $2$.

INDICE

**Outil :** dérive terme à terme. **Point délicat :** toute primitive de $f$ diffère de celle-ci d'une constante, qui ne change pas la comparaison.