BURHAN

Fonctions primitives : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Entraînement	7

Exercice 1

Le coefficient à ajuster

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2(x^3+2)^4$.

INDICE

Outil : la forme $u'u^n$. **Début :** avec $u(x) = x^3+2$, compare $u'(x)$ et le facteur x^2.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x^3+2$ pour tout réel x. Alors $u'(x) = 3x^2$, donc $x^2 = \dfrac{1}{3}\,u'(x)$ et :

$$x^2(x^3+2)^4 = \frac{1}{3}\,u'(x)\,u(x)^4.$$

Primitive. Une primitive de $u'u^4$ est $\dfrac{u^5}{5}$. On multiplie par $\dfrac{1}{3}$: $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{(x^3+2)^5}{5} = \dfrac{(x^3+2)^5}{15}$.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de $\dfrac{(x^3+2)^5}{15}$ vaut :

$$\frac{5 \times 3x^2\,(x^3+2)^4}{15} = x^2(x^3+2)^4.$$

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2(x^3+2)^4$ est $x \mapsto \dfrac{(x^3+2)^5}{15}$.

2.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (5-2x)^3$.

INDICE

Outil : même forme. **Point délicat :** la dérivée de $5-2x$ vaut -2 ; le coefficient à placer est négatif.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = 5-2x$ pour tout réel x. Alors $u'(x) = -2$, donc $1 = -\dfrac{1}{2}\,u'(x)$ et :

$$(5-2x)^3 = -\frac{1}{2}\,u'(x)\,u(x)^3.$$

Primitive. Une primitive de $u'u^3$ est $\dfrac{u^4}{4}$. On multiplie par $-\dfrac{1}{2}$: $-\dfrac{1}{2} \times \dfrac{(5-2x)^4}{4} = -\dfrac{(5-2x)^4}{8}$.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de $-\dfrac{(5-2x)^4}{8}$ vaut :

$$-\frac{4 \times (-2)(5-2x)^3}{8} = (5-2x)^3.$$

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (5-2x)^3$ est $x \mapsto -\dfrac{(5-2x)^4}{8}$.

3.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (2x^2+1)^2$.

INDICE

Début : développe le carré. **Point délicat :** la dérivée de $2x^2+1$ est $4x$; ce facteur dépend de x et ne peut pas être ajusté par une constante.

CORRIGÉ

Pourquoi développer. Avec $u(x) = 2x^2+1$, on a $u'(x) = 4x$. Ce facteur dépend de x et n'apparaît pas dans la fonction : aucune constante ne permet de l'obtenir, donc la forme $u'u^n$ ne s'applique pas.

Développement. Pour tout réel x :

$$(2x^2+1)^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1.$$

Primitive. Terme à terme : $4 \times \dfrac{x^5}{5} = \dfrac{4x^5}{5}$, $4 \times \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{4x^3}{3}$, et une primitive de 1 est x.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de $\dfrac{4x^5}{5} + \dfrac{4x^3}{3} + x$ vaut $4x^4 + 4x^2 + 1$, soit $(2x^2+1)^2$.

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (2x^2+1)^2$ est $x \mapsto \dfrac{4x^5}{5} + \dfrac{4x^3}{3} + x$.

Exercice 2

Une racine d'expression au dénominateur

1.

Justifier que $x^3+8>0$ pour tout x de $]-2;+\infty[$, puis déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}}$ sur cet intervalle.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$, si $u>0$. **Début :** la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $(-2)^3=-8$.

CORRIGÉ

Signe. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour $x>-2$, on a donc $x^3>(-2)^3$, soit $x^3>-8$, c'est-à-dire $x^3+8>0$.

Forme. Posons $u(x)=x^3+8$, strictement positive sur $]-2;+\infty[$. Alors $u'(x)=3x^2$: la fonction s'écrit $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Primitive. Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. Une primitive sur $]-2;+\infty[$ est donc $x \mapsto 2\sqrt{x^3+8}$.

Contrôle. Pour tout $x>-2$, la dérivée de $2\sqrt{x^3+8}$ vaut :

$$2\times\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}}=\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}}.$$

Conclusion. Pour tout x de $]-2;+\infty[$, $x^3+8>0$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}}$ sur cet intervalle est $x \mapsto 2\sqrt{x^3+8}$.

2.

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$ sur $\left]-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.

INDICE

Outil : même forme. **Début :** la dérivée de $2x+5$ vaut 2 ; écris la fonction comme $\dfrac{1}{2}$ fois la forme.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x)=2x+5$. Pour $x>-\dfrac{5}{2}$, on a $2x>-5$, donc $u(x)>0$. De plus $u'(x)=2$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{2x+5}}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Primitive. Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. On multiplie par $\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2x+5}=\sqrt{2x+5}$.

Contrôle. Pour tout $x>-\dfrac{5}{2}$, la dérivée de $\sqrt{2x+5}$ vaut $\dfrac{2}{2\sqrt{2x+5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$.

Conclusion. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$ sur $\left]-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ est $x \mapsto \sqrt{2x+5}$.

3.

Vérifier que $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$, puis déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

INDICE

Début : développe $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$. **Ensuite :** dérive x^2-x+1 et compare avec le numérateur.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\\&=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\\&=x^2-x+1.\end{aligned}$$

Signe. Un carré est positif ou nul, donc $x^2-x+1\geq\dfrac{3}{4}$: pour tout réel x, $x^2-x+1>0$.

Forme. Posons $u(x)=x^2-x+1$. Alors $u'(x)=2x-1$: la fonction s'écrit $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, et une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de $2\sqrt{x^2-x+1}$ vaut :

$$\begin{aligned}&2\times\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\\&=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{x^2-x+1}$.

Exercice 3

Primitives d'une fonction usuelle d'une expression affine

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (4x-1)^5$.

INDICE

Outil : si F est une primitive de f, alors $\dfrac{1}{a}F(ax+b)$ est une primitive de $f(ax+b)$. **Début :** ici la fonction usuelle est $t \mapsto t^5$ et $a = 4$.

CORRIGÉ

Formule. Si F est une primitive de f et $a \neq 0$, alors $x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax+b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$. Ici $f(t) = t^5$, $F(t) = \dfrac{t^6}{6}$, $a = 4$ et $b = -1$.

Primitive. On obtient $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{(4x-1)^6}{6} = \dfrac{(4x-1)^6}{24}$.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de $\dfrac{(4x-1)^6}{24}$ vaut :

$$\begin{aligned}&\frac{6 \times 4\,(4x-1)^5}{24}\\ &= (4x-1)^5.\end{aligned}$$

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (4x-1)^5$ est $x \mapsto \dfrac{(4x-1)^6}{24}$.

2.

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(3-x)^2}$ sur $]-\infty;3[$.

INDICE

Outil : même formule, avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$. **Point délicat :** ici $a = -1$, et $3 - x > 0$ sur l'intervalle.

CORRIGÉ

Formule. Sur $]0;+\infty[$, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$. Ici $a = -1$ et $b = 3$.

Intervalle. Pour $x < 3$, on a $3 - x > 0$: le nombre $3 - x$ reste dans $]0;+\infty[$.

Primitive. Une primitive sur $]-\infty;3[$ est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3-x}$, car :

$$\frac{1}{-1} \times \left(-\frac{1}{3-x}\right) = \frac{1}{3-x}.$$

Contrôle. On écrit $\dfrac{1}{3-x} = (3-x)^{-1}$. Pour tout $x < 3$, sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned}&(-1) \times (3-x)^{-2} \times (-1)\\ &= \frac{1}{(3-x)^2}.\end{aligned}$$

Conclusion. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(3-x)^2}$ sur $]-\infty;3[$ est $x \mapsto \dfrac{1}{3-x}$.

3.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \left(\frac{x}{2}+1\right)^3$.

INDICE

Outil : même formule, avec $a=\frac{1}{2}$. **Point délicat :** diviser par $\frac{1}{2}$ revient à multiplier par 2.

CORRIGÉ

Formule. Ici $f(t)=t^3$, $F(t)=\frac{t^4}{4}$, $a=\frac{1}{2}$ et $b=1$. Diviser par $\frac{1}{2}$ revient à multiplier par 2.

Primitive. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & 2\times\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}+1\right)^4 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)^4. \end{aligned}$$

Contrôle. Posons $u(x)=\frac{x}{2}+1$, de dérivée $u'(x)=\frac{1}{2}$. La dérivée de $\frac{1}{2}u^4$ est $\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}\,u^3=u^3$: pour tout réel x, on retrouve $\left(\frac{x}{2}+1\right)^3$.

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \left(\frac{x}{2}+1\right)^3$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)^4$.

Exercice 4

Des sommes qui mêlent les formes

1.

Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de $x \mapsto 3x^2 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

INDICE

Outil : une primitive d'une somme. **Début :** le dernier terme est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x+1$, non nul pour $x > 0$.

CORRIGÉ

Terme à terme. Une primitive d'une somme s'obtient terme à terme. Sur $]0;+\infty[$:

- une primitive de $3x^2$ est x^3 ;
- une primitive de $\dfrac{1}{x^3}$ est $-\dfrac{1}{2x^2}$, donc une primitive de $-\dfrac{2}{x^3}$ est $-2 \times \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2}$;
- avec $u(x) = x+1$, qui ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$ (car $x+1 > 1$), et $u'(x) = 1$, une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$: une primitive de $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ est $-\dfrac{1}{x+1}$.

Contrôle. Pour tout $x > 0$, la dérivée de $x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x+1}$ vaut $3x^2 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Conclusion. Sur $]0;+\infty[$, une primitive de la fonction donnée est $x \mapsto x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x+1}$.

2.

On admet que $x^2 - 2x + 3 > 0$ pour tout réel x. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 4x + \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

INDICE

Outil : une primitive d'une somme et la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. **Début :** dérive $x^2 - 2x + 3$.

CORRIGÉ

Terme à terme. Une primitive de $4x$ est $2x^2$. Posons $u(x) = x^2 - 2x + 3$, strictement positive sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé. Alors $u'(x) = 2x - 2$, et une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

Contrôle. La dérivée de $2x^2$ est $4x$, celle de $2\sqrt{u}$ est $2 \times \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. Pour tout réel x, la dérivée de la somme vaut donc $4x + \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Conclusion. Sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction donnée est $x \mapsto 2x^2 + 2\sqrt{x^2-2x+3}$.

Exercice 5

Conditions initiales sur des primitives non polynomiales

1.

Déterminer la primitive F de $x \mapsto \dfrac{2}{(2x+1)^2}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ telle que $F(0)=3$.

INDICE

Outil : la forme $\dfrac{u'}{u^2}$, puis la condition initiale. **Début :** avec $u(x)=2x+1$, on a $u'(x)=2$.

CORRIGÉ

Une primitive. Posons $u(x)=2x+1$. Pour $x>-\dfrac{1}{2}$, on a $2x+1>0$: u ne s'annule pas sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$. Comme $u'(x)=2$, la fonction s'écrit $\dfrac{u'}{u^2}$, et $x \mapsto -\dfrac{1}{2x+1}$ en est une primitive.

Forme générale. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, il existe un réel k tel que, pour tout $x>-\dfrac{1}{2}$:

$$F(x)=-\frac{1}{2x+1}+k.$$

Condition. On a $F(0)=-1+k$. La condition $F(0)=3$ s'écrit $-1+k=3$, d'où $k=4$.

Contrôle. Pour tout $x>-\dfrac{1}{2}$, $F'(x)=\dfrac{2}{(2x+1)^2}$, et $F(0)=4-1=3$.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction F définie sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $F(x)=4-\dfrac{1}{2x+1}$.

2.

Calculer $F(2)$.

INDICE

Début : remplace x par 2 ; on a $2\times 2+1=5$.

CORRIGÉ

On remplace x par 2 : $2\times 2+1=5$, donc :

$$F(2)=4-\frac{1}{5}=\frac{20-1}{5}.$$

Conclusion. $F(2)=\dfrac{19}{5}$.

3.

Déterminer la primitive H de $x \mapsto 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ telle que $H(4) = 1$. Vérifier que $H(x) = (\sqrt{x} - 3)^2$.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$. **Ensuite :** développe $(\sqrt{x} - 3)^2$.

CORRIGÉ

Une primitive. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto 6\sqrt{x}$, et une primitive de $x \mapsto 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto x - 6\sqrt{x}$.

Forme générale. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $]0;+\infty[$, il existe un réel k tel que $H(x) = x - 6\sqrt{x} + k$ pour tout $x > 0$.

Condition. On a $H(4) = 4 - 6 \times 2 + k = -8 + k$. La condition $H(4) = 1$ s'écrit $-8 + k = 1$, d'où $k = 9$. Donc $H(x) = x - 6\sqrt{x} + 9$.

Carré. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 &= x - 6\sqrt{x} + 9 \\ &= H(x).\end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout $x > 0$, $H'(x) = 1 - \dfrac{6}{2\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$, et $H(4) = (2-3)^2 = 1$.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par $H(x) = x - 6\sqrt{x} + 9$; pour tout $x > 0$, $H(x) = (\sqrt{x} - 3)^2$.

Exercice 6

Recette, coût et bénéfice d'une coopérative agricole

Données fictives. Une coopérative agricole conditionne q tonnes d'olives par jour, avec $0 \leq q \leq 10$. Les montants sont en milliers de dirhams. La recette marginale vaut $R'(q) = 60 - 6q$ et le coût marginal vaut $C'(q) = 2q + 12$. La recette est nulle quand rien n'est vendu. Les coûts fixes s'élèvent à 40 milliers de dirhams.

1.

Déterminer la recette totale $R(q)$.

INDICE

Outil : R est une primitive de R' sur $[0;10]$. **Début :** traduis « recette nulle quand rien n'est vendu » par une égalité.

CORRIGÉ

Forme générale. La recette totale R est une primitive de R' sur $[0;10]$, et $q \mapsto 60q - 3q^2$ en est une autre. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $[0;10]$, il existe un réel k tel que, pour tout q de $[0;10]$:

$$R(q) = 60q - 3q^2 + k.$$

Condition. La recette est nulle quand rien n'est vendu : $R(0) = 0$. Or $R(0) = k$, donc $k = 0$.

Contrôle. Pour tout q de $[0;10]$, $R'(q) = 60 - 6q$, et $R(0) = 0$.

Conclusion. Pour tout q de $[0;10]$, $R(q) = 60q - 3q^2$, en milliers de dirhams.

2.

Déterminer le coût total $C(q)$.

INDICE

Outil : même méthode. **Point délicat :** les coûts fixes sont le coût pour $q = 0$.

CORRIGÉ

Forme générale. Le coût total C est une primitive de C' sur $[0;10]$, et $q \mapsto q^2 + 12q$ en est une autre. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $[0;10]$, il existe un réel k tel que, pour tout q de $[0;10]$:

$$C(q) = q^2 + 12q + k.$$

Condition. Les coûts fixes sont le coût pour $q = 0$: $C(0) = k = 40$.

Contrôle. Pour tout q de $[0;10]$, $C'(q) = 2q + 12$, et $C(0) = 40$.

Conclusion. Pour tout q de $[0;10]$, $C(q) = q^2 + 12q + 40$, en milliers de dirhams.

3. a)

On appelle bénéfice la différence entre recette et coût : $B(q) = R(q) - C(q)$. Exprimer $B(q)$.

INDICE

Début : remplace $R(q)$ et $C(q)$ par les expressions des questions 1 et 2. **Point délicat :** le signe moins porte sur tous les termes de $C(q)$.

CORRIGÉ

Expression. Le signe moins porte sur les trois termes de $C(q)$. Pour tout q de $[0;10]$:

$$\begin{aligned} B(q) &= 60q - 3q^2 \\ &\quad - (q^2 + 12q + 40) \\ &= -4q^2 + 48q - 40. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout q de $[0;10]$, $B'(q) = -8q + 48$ et :

$$\begin{aligned} &R'(q) - C'(q) \\ &= 60 - 6q - 2q - 12 \\ &= 48 - 8q. \end{aligned}$$

Les deux dérivées coïncident.

Conclusion. Pour tout q de $[0;10]$, $B(q) = -4q^2 + 48q - 40$, en milliers de dirhams.

3. b)

Étudier le sens de variation de B sur $[0;10]$.

INDICE

Outil : le signe de B' donne le sens de variation de B. **Début :** factorise $B'(q) = -8q + 48$.

CORRIGÉ

Dérivée. Pour tout q de $[0;10]$, $B'(q) = -8q + 48 = 8(6 - q)$.

Signe. On a $B'(q) > 0$ pour $0 \leq q < 6$, $B'(6) = 0$, et $B'(q) < 0$ pour $6 < q \leq 10$.

Variations. B' est strictement positive sur $[0;6[$, donc B est strictement croissante sur $[0;6]$. B' est strictement négative sur $]6;10]$, donc B est strictement décroissante sur $[6;10]$.

Conclusion. Le bénéfice B est strictement croissant sur $[0;6]$ et strictement décroissant sur $[6;10]$.

3. c)

En déduire le bénéfice maximal et la quantité qui le donne.

INDICE

Point délicat : B croît puis décroît : où est le maximum ?

CORRIGÉ

Maximum. D'après la question 3. b), B est strictement croissante sur $[0;6]$ puis strictement décroissante sur $[6;10]$: le maximum est atteint en 6.

Valeur. On a $-4\times 6^2=-144$ et $48\times 6=288$, donc :

$$\begin{aligned} B(6) &= -144+288-40 \\ &= 104. \end{aligned}$$

Conclusion. Le bénéfice maximal vaut 104 milliers de dirhams ; il est obtenu pour 6 tonnes d'olives par jour.

Exercice 7

Lire les variations d'une primitive sur le signe de la fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 6$, et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1.

Vérifier que $f(x) = (x-3)(x+2)$, puis étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : développe $(x-3)(x+2)$. **Ensuite :** un tableau de signes des deux facteurs.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-3)(x+2)\\&= x^2 + 2x - 3x - 6\\&= x^2 - x - 6\\&= f(x).\end{aligned}$$

Signe. Les facteurs $x-3$ et $x+2$ s'annulent en 3 et en -2 :

- pour $x < -2$, les deux facteurs sont strictement négatifs, donc $f(x) > 0$;
- pour $-2 < x < 3$, on a $x+2 > 0$ et $x-3 < 0$, donc $f(x) < 0$;
- pour $x > 3$, les deux facteurs sont strictement positifs, donc $f(x) > 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = (x-3)(x+2)$. De plus $f(x) > 0$ sur $]-\infty;-2[$ et sur $]3;+\infty[$, $f(x) < 0$ sur $]-2;3[$, et $f(-2) = f(3) = 0$.

2.

En déduire le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : $F' = f$, et le signe de la dérivée donne le sens de variation.

CORRIGÉ

Lien. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$. Le signe de f donne donc le sens de variation de F.

Variations. D'après la question 1 :

- F' est strictement positive sur $]-\infty;-2[$, donc F est strictement croissante sur $]-\infty;-2]$;
- F' est strictement négative sur $]-2;3[$, donc F est strictement décroissante sur $[-2;3]$;
- F' est strictement positive sur $]3;+\infty[$, donc F est strictement croissante sur $[3;+\infty[$.

Conclusion. F est strictement croissante sur $]-\infty;-2]$, strictement décroissante sur $[-2;3]$ et strictement croissante sur $[3;+\infty[$.

3.

Sans calculer F, comparer $F(-1)$ et $F(2)$.

INDICE

Point délicat : les deux nombres -1 et 2 sont dans un même intervalle où le sens de variation de F est connu.

CORRIGÉ

Les réels -1 et 2 appartiennent à l'intervalle $[-2;3]$, sur lequel F est strictement décroissante d'après la question 2. Une fonction strictement décroissante renverse l'ordre : comme $-1<2$, on a $F(-1)>F(2)$.

Conclusion. $F(-1)>F(2)$.

4.

Contrôler ce résultat : vérifier que $x\mapsto \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis calculer ses valeurs en -1 et en 2.

INDICE

Outil : dérive terme à terme. **Point délicat :** toute primitive de f diffère de celle-ci d'une constante, qui ne change pas la comparaison.

CORRIGÉ

Contrôle en dérivant. Notons G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x$. Pour tout réel x, $G'(x)=x^2-x-6=f(x)$: G est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Valeurs. On calcule :

$$\begin{aligned} G(-1) &= -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+6 \\ &= \frac{-2-3+36}{6} \\ &= \frac{31}{6}, \\ G(2) &= \frac{8}{3}-2-12 \\ &= \frac{8-42}{3} \\ &= -\frac{34}{3}. \end{aligned}$$

Comparaison. On a $\dfrac{31}{6}>0>-\dfrac{34}{3}$, donc $G(-1)>G(2)$. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $\mathbb{R}$, il existe un réel k tel que $F(x)=G(x)+k$ pour tout réel x. La constante k s'ajoute aux deux valeurs et ne change pas la comparaison.

Conclusion. La fonction $x\mapsto \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$; ses valeurs en -1 et en 2 sont $\dfrac{31}{6}$ et $-\dfrac{34}{3}$. On retrouve $F(-1)>F(2)$.