BURHAN

Fonctions primitives : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Application	8

Exercice 1

Vérifier une primitive en dérivant

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}$.

1.

Vérifier que la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ est une primitive de f sur $]-2;+\infty[$.

INDICE

Outil : la définition d'une primitive : dérive F, puis compare avec f. **Début :** F est un quotient $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x)=2x-1$ et $v(x)=x+2$.

2.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=x^3+4x$. Est-ce une primitive de $x\mapsto 3x^2+7$ sur $\mathbb{R}$? Si ce n'est pas le cas, modifier un seul coefficient de G pour en obtenir une.

INDICE

Outil : même méthode : dérive G. **Point délicat :** une seule valeur de x où les deux expressions diffèrent suffit pour conclure.

Exercice 2

Puissances et inverses de puissances

1.

Donner une primitive de $x \mapsto x^7$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. **Début :** ici $n = 7$.

2.

Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^6}$ sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : pour $n \geq 2$, une primitive de $\dfrac{1}{x^n}$ est $-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$. **Début :** ici $n = 6$, donc $n - 1 = 5$.

3.

Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^7}$ sur $]-\infty;0[$.

INDICE

Outil : la même ligne du tableau, avec $n = 7$. **Point délicat :** la formule vaut aussi sur $]-\infty;0[$, qui ne contient pas 0.

Exercice 3

La racine carrée au dénominateur

1.

Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : le tableau des primitives usuelles, ligne de la racine carrée. **Début :** pense à la dérivée de $\sqrt{x}$.

2.

En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : si F est une primitive de f, alors $5F$ est une primitive de $5f$.

3.

Expliquer pourquoi on ne cherche pas de primitive de $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ sur $[0;+\infty[$.

INDICE

Début : calcule $\sqrt{0}$. **Point délicat :** une primitive se cherche sur un intervalle où la fonction est définie.

Exercice 4

Primitive d'une fonction polynôme

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 6x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 4$.

INDICE

Outil : une primitive d'une somme et le produit par un réel. **Début :** une primitive de $6x^5$ est $6 \times \dfrac{x^6}{6}$.

2.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{2}{3}x - 1$.

INDICE

Outil : même méthode. **Point délicat :** garde chaque coefficient fractionnaire, puis divise par le nouvel exposant.

Exercice 5

Reconnaître la forme u'u puissance n

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x(x^2+1)^5$.

INDICE

Outil : une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$. **Début :** pose $u(x) = x^2 + 1$ et calcule $u'(x)$.

2.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (3x^2 - 2)(x^3 - 2x + 1)^2$.

INDICE

Outil : même forme. **Début :** dérive l'expression placée sous le carré.

Exercice 6

Un carré au dénominateur

1.

On admet que $x^2 + x + 3 > 0$ pour tout réel x. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$.

INDICE

Outil : si u ne s'annule pas, une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$. **Début :** dérive $x^2 + x + 3$.

2.

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{-2}{(1-2x)^2}$ sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$.

INDICE

Outil : même forme. **Début :** $u(x) = 1 - 2x$; calcule $u'(x)$ et compare avec le numérateur.

Exercice 7

Les utilisateurs d'une application mobile

Données fictives. Une application mobile vient d'être lancée. On note $N(t)$ le nombre de ses utilisateurs, en centaines, t semaines après le lancement, pour $0 \leq t \leq 10$. Le rythme d'inscription est $N'(t) = 3t^2 + 4t + 5$, en centaines d'utilisateurs par semaine.

1.

Donner toutes les primitives de $t \mapsto 3t^2 + 4t + 5$ sur $[0;10]$.

INDICE

Outil : l'ensemble des primitives : une primitive, plus une constante k. **Début :** une primitive de $3t^2$ est t^3.

2.

On considère les fonctions G_1, G_2 et G_3 définies sur $[0;10]$ par :

$$G_1(t) = t^3 + 2t^2 + 5t + 12,$$

$$G_2(t) = t^3 + 2t^2 + 5,$$

$$G_3(t) = t^3 + 2t^2 + 5t - 0{,}5.$$

Lesquelles sont des primitives de N' sur $[0;10]$?

INDICE

Outil : la question 1 ou une dérivation. **Point délicat :** regarde le terme en t de chaque fonction.

3.

Calculer $G_1(10) - G_1(0)$. Sans nouveau calcul, que vaut $G_3(10) - G_3(0)$?

INDICE

Début : calcule $10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10$. **Point délicat :** que devient la constante dans une différence ?

Exercice 8

La primitive qui s'annule en 1

1.

Déterminer la primitive F de $x \mapsto 3x^2 - 8x + 2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 0$.

INDICE

Outil : toutes les primitives s'écrivent $G(x) + k$. **Début :** une primitive de $-8x$ est $-4x^2$.

2.

Calculer $F(3)$.

INDICE

Début : remplace x par 3 dans l'expression trouvée.