BURHAN

Fonctions primitives : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Application	8

Exercice 1

Vérifier une primitive en dérivant

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}$.

1.

Vérifier que la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ est une primitive de f sur $]-2;+\infty[$.

INDICE

Outil : la définition d'une primitive : dérive F, puis compare avec f. **Début :** F est un quotient $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x)=2x-1$ et $v(x)=x+2$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Pour tout $x>-2$, on a $x+2\neq 0$. Quotient de deux fonctions affines dont le dénominateur ne s'annule pas, F est dérivable sur $]-2;+\infty[$.

Dérivée. D'après la dérivée d'un quotient, pour tout $x>-2$:

$$\begin{aligned} &F'(x)\\ &=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}\\ &=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}\\ &=\frac{5}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $]-2;+\infty[$, $F'(x)=f(x)$: la fonction F est une primitive de f sur $]-2;+\infty[$.

2.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=x^3+4x$. Est-ce une primitive de $x\mapsto 3x^2+7$ sur $\mathbb{R}$? Si ce n'est pas le cas, modifier un seul coefficient de G pour en obtenir une.

INDICE

Outil : même méthode : dérive G. **Point délicat :** une seule valeur de x où les deux expressions diffèrent suffit pour conclure.

CORRIGÉ

Dérivée de G. Pour tout réel x, $G'(x)=3x^2+4$.

Comparaison. En $x=0$, on obtient $G'(0)=4$, alors que $3\times 0^2+7=7$. Les deux fonctions diffèrent en 0 : G n'est pas une primitive de $x\mapsto 3x^2+7$ sur $\mathbb{R}$.

Correction. On remplace le coefficient 4 par 7 : on obtient la fonction $x\mapsto x^3+7x$.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de x^3+7x vaut $3x^2+7$.

Conclusion. G n'est pas une primitive de $x\mapsto 3x^2+7$ sur $\mathbb{R}$. En remplaçant le coefficient 4 par 7, on obtient la primitive $x\mapsto x^3+7x$.

Exercice 2

Puissances et inverses de puissances

1.

Donner une primitive de $x \mapsto x^7$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. **Début :** ici $n = 7$.

CORRIGÉ

Formule. Une primitive de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Ici $n = 7$, donc $n + 1 = 8$.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de $\dfrac{x^8}{8}$ vaut $\dfrac{8x^7}{8} = x^7$.

Conclusion. Une primitive de $x \mapsto x^7$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^8}{8}$.

2.

Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^6}$ sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : pour $n \geq 2$, une primitive de $\dfrac{1}{x^n}$ est $-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$. **Début :** ici $n = 6$, donc $n - 1 = 5$.

CORRIGÉ

Formule. Pour $n \geq 2$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$. Ici $n = 6$, donc $n - 1 = 5$.

Contrôle. On écrit $-\dfrac{1}{5x^5} = -\dfrac{1}{5}\,x^{-5}$. Pour tout $x > 0$, sa dérivée vaut $-\dfrac{1}{5} \times (-5)\,x^{-6} = \dfrac{1}{x^6}$.

Conclusion. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^6}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{5x^5}$.

3.

Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^7}$ sur $]-\infty;0[$.

INDICE

Outil : la même ligne du tableau, avec $n = 7$. **Point délicat :** la formule vaut aussi sur $]-\infty;0[$, qui ne contient pas 0.

CORRIGÉ

Formule. La même formule vaut sur $]-\infty;0[$, intervalle qui ne contient pas 0. Ici $n = 7$, donc $n - 1 = 6$.

Contrôle. On écrit $-\dfrac{1}{6x^6} = -\dfrac{1}{6}\,x^{-6}$. Pour tout $x < 0$, sa dérivée vaut $-\dfrac{1}{6} \times (-6)\,x^{-7} = \dfrac{1}{x^7}$.

Conclusion. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^7}$ sur $]-\infty;0[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{6x^6}$.

Exercice 3

La racine carrée au dénominateur

1.

Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : le tableau des primitives usuelles, ligne de la racine carrée. **Début :** pense à la dérivée de $\sqrt{x}$.

CORRIGÉ

Primitive. D'après le tableau des primitives usuelles, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

Contrôle. Pour tout $x > 0$, la dérivée de $\sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc :

$$\left(2\sqrt{x}\right)' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Conclusion. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

2.

En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : si F est une primitive de f, alors $5F$ est une primitive de $5f$.

CORRIGÉ

Produit par un réel. Si F est une primitive de f sur un intervalle, alors $5F$ est une primitive de $5f$ sur cet intervalle.

Primitive. D'après la question 1, une primitive de $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto 10\sqrt{x}$, car $5 \times 2\sqrt{x} = 10\sqrt{x}$.

Contrôle. Pour tout $x > 0$:

$$\left(10\sqrt{x}\right)' = \frac{10}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{x}}.$$

Conclusion. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto 10\sqrt{x}$.

3.

Expliquer pourquoi on ne cherche pas de primitive de $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ sur $[0;+\infty[$.

INDICE

Début : calcule $\sqrt{0}$. **Point délicat :** une primitive se cherche sur un intervalle où la fonction est définie.

CORRIGÉ

Valeur en 0. On a $\sqrt{0}=0$: le quotient $\dfrac{5}{\sqrt{x}}$ n'existe pas pour $x=0$.

Conséquence. La fonction $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ n'est donc pas définie sur $[0;+\infty[$. Or on cherche une primitive sur un intervalle où la fonction est définie et continue.

Conclusion. On ne cherche pas de primitive sur $[0;+\infty[$ car la fonction n'est pas définie en 0. On travaille sur $]0;+\infty[$, où elle est définie et continue.

Exercice 4

Primitive d'une fonction polynôme

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 6x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 4$.

INDICE

Outil : une primitive d'une somme et le produit par un réel. **Début :** une primitive de $6x^5$ est $6 \times \dfrac{x^6}{6}$.

CORRIGÉ

Terme à terme. Une primitive d'une somme s'obtient terme à terme, et un coefficient multiplicatif se conserve. Pour chaque terme :

- pour $6x^5$: $6 \times \dfrac{x^6}{6} = x^6$;
- pour $-8x^3$: $-8 \times \dfrac{x^4}{4} = -2x^4$;
- pour $3x^2$: $3 \times \dfrac{x^3}{3} = x^3$;
- pour -4 : $-4x$.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de $x^6 - 2x^4 + x^3 - 4x$ vaut $6x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 4$.

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 6x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 4$ est $x \mapsto x^6 - 2x^4 + x^3 - 4x$.

2.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{2}{3}x - 1$.

INDICE

Outil : même méthode. **Point délicat :** garde chaque coefficient fractionnaire, puis divise par le nouvel exposant.

CORRIGÉ

Terme à terme. On garde chaque coefficient, puis on divise par le nouvel exposant :

- pour $\dfrac{1}{2}x^3$: $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^4}{4} = \dfrac{x^4}{8}$;
- pour $\dfrac{2}{3}x$: $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x^2}{3}$;
- pour -1 : $-x$.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de $\dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^2}{3} - x$ vaut :

$$\begin{aligned} &\frac{4x^3}{8} + \frac{2x}{3} - 1 \\ &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x - 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{2}{3}x - 1$ est $x \mapsto \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^2}{3} - x$.

Exercice 5

Reconnaître la forme u'u puissance n

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x(x^2+1)^5$.

INDICE

Outil : une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$. **Début :** pose $u(x) = x^2+1$ et calcule $u'(x)$.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x^2+1$ pour tout réel x. Alors $u'(x) = 2x$: la fonction s'écrit $u'u^5$ sur $\mathbb{R}$.

Primitive. Une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$. Avec $n=5$, une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{(x^2+1)^6}{6}$.

Contrôle. Pour tout réel x, la dérivée de $\dfrac{(x^2+1)^6}{6}$ vaut :

$$\frac{6 \times 2x\,(x^2+1)^5}{6} = 2x(x^2+1)^5.$$

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x(x^2+1)^5$ est $x \mapsto \dfrac{(x^2+1)^6}{6}$.

2.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (3x^2-2)(x^3-2x+1)^2$.

INDICE

Outil : même forme. **Début :** dérive l'expression placée sous le carré.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x^3-2x+1$ pour tout réel x. Alors $u'(x) = 3x^2-2$: la fonction s'écrit $u'u^2$ sur $\mathbb{R}$.

Primitive. Avec $n=2$, une primitive de $u'u^2$ est $\dfrac{u^3}{3}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto \dfrac{(x^3-2x+1)^3}{3}$.

Contrôle. La dérivée de $\dfrac{u^3}{3}$ est $\dfrac{3u'u^2}{3} = u'u^2$. Pour tout réel x, on retrouve $(3x^2-2)(x^3-2x+1)^2$.

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (3x^2-2)(x^3-2x+1)^2$ est $x \mapsto \dfrac{(x^3-2x+1)^3}{3}$.

Exercice 6

Un carré au dénominateur

1.

On admet que $x^2+x+3>0$ pour tout réel x. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$.

INDICE

Outil : si u ne s'annule pas, une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$. **Début :** dérive x^2+x+3.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x)=x^2+x+3$ pour tout réel x. D'après l'énoncé, u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus $u'(x)=2x+1$: la fonction s'écrit $\dfrac{u'}{u^2}$.

Primitive. Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2+x+3}$.

Contrôle. La dérivée de $-\dfrac{1}{u}$ est $\dfrac{u'}{u^2}$. Pour tout réel x, elle vaut $\dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$.

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2+x+3}$.

2.

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{-2}{(1-2x)^2}$ sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$.

INDICE

Outil : même forme. **Début :** $u(x)=1-2x$; calcule $u'(x)$ et compare avec le numérateur.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x)=1-2x$. Pour $x<\dfrac{1}{2}$, on a $2x<1$, donc $u(x)>0$: u ne s'annule pas sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$. De plus $u'(x)=-2$: la fonction s'écrit $\dfrac{u'}{u^2}$.

Primitive. Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$. Une primitive sur cet intervalle est donc $x \mapsto -\dfrac{1}{1-2x}$.

Contrôle. On écrit $-\dfrac{1}{1-2x}=-(1-2x)^{-1}$. Pour tout $x<\dfrac{1}{2}$, sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned}&(1-2x)^{-2}\times(-2)\\&=\frac{-2}{(1-2x)^2}.\end{aligned}$$

Conclusion. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{-2}{(1-2x)^2}$ sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{1-2x}$.

Exercice 7

Les utilisateurs d'une application mobile

Données fictives. Une application mobile vient d'être lancée. On note $N(t)$ le nombre de ses utilisateurs, en centaines, t semaines après le lancement, pour $0 \leq t \leq 10$. Le rythme d'inscription est $N'(t) = 3t^2 + 4t + 5$, en centaines d'utilisateurs par semaine.

1.

Donner toutes les primitives de $t \mapsto 3t^2 + 4t + 5$ sur $[0;10]$.

INDICE

Outil : l'ensemble des primitives : une primitive, plus une constante k. **Début :** une primitive de $3t^2$ est t^3.

CORRIGÉ

Une primitive. Terme à terme : $3 \times \dfrac{t^3}{3} = t^3$, $4 \times \dfrac{t^2}{2} = 2t^2$, et une primitive de 5 est $5t$. La fonction $t \mapsto t^3 + 2t^2 + 5t$ est donc une primitive de $t \mapsto 3t^2 + 4t + 5$ sur $[0;10]$.

Contrôle. Pour tout t de $[0;10]$, la dérivée de $t^3 + 2t^2 + 5t$ vaut $3t^2 + 4t + 5$.

Conclusion. D'après l'ensemble des primitives sur un intervalle, les primitives de $t \mapsto 3t^2 + 4t + 5$ sur $[0;10]$ sont les fonctions $t \mapsto t^3 + 2t^2 + 5t + k$, où k est un réel.

2.

On considère les fonctions G_1, G_2 et G_3 définies sur $[0;10]$ par :

$$G_1(t) = t^3 + 2t^2 + 5t + 12,$$
$$G_2(t) = t^3 + 2t^2 + 5,$$
$$G_3(t) = t^3 + 2t^2 + 5t - 0{,}5.$$

Lesquelles sont des primitives de N' sur $[0;10]$?

INDICE

Outil : la question 1 ou une dérivation. **Point délicat :** regarde le terme en t de chaque fonction.

CORRIGÉ

G_1 et G_3. Elles s'écrivent $t^3 + 2t^2 + 5t + k$, avec $k = 12$ pour G_1 et $k = -0{,}5$ pour G_3. D'après la question 1, ce sont des primitives de N' sur $[0;10]$.

G_2. Pour tout t de $[0;10]$, $G_2'(t) = 3t^2 + 4t$. En $t = 0$, on obtient $G_2'(0) = 0$, alors que $N'(0) = 5$: G_2 n'est pas une primitive de N'.

Conclusion. Parmi les trois fonctions, seules G_1 et G_3 sont des primitives de N' sur $[0;10]$.

3.

Calculer $G_1(10) - G_1(0)$. Sans nouveau calcul, que vaut $G_3(10) - G_3(0)$?

INDICE

Début : calcule $10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10$. **Point délicat :** que devient la constante dans une différence ?

CORRIGÉ

Calcul. On a $G_1(0) = 12$ et :

$$\begin{aligned} G_1(10) &= 1000 + 200 \\ &\quad + 50 + 12 \\ &= 1262. \end{aligned}$$

Donc $G_1(10) - G_1(0) = 1262 - 12 = 1250$.

Sans calcul. Pour tout t de $[0;10]$, $G_3(t) = G_1(t) - 12{,}5$. Cette constante disparaît dans la différence : $G_3(10) - G_3(0)$ est égal à $G_1(10) - G_1(0)$.

Contrôle. On a $G_3(10) = 1249{,}5$ et $G_3(0) = -0{,}5$, donc :

$$\begin{aligned} &G_3(10) - G_3(0) \\ &= 1249{,}5 - (-0{,}5) \\ &= 1250. \end{aligned}$$

Conclusion. $G_1(10) - G_1(0) = 1250$ et, sans nouveau calcul, $G_3(10) - G_3(0) = 1250$.

Exercice 8

La primitive qui s'annule en 1

1.

Déterminer la primitive F de $x \mapsto 3x^2 - 8x + 2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 0$.

INDICE

Outil : toutes les primitives s'écrivent $G(x) + k$. **Début :** une primitive de $-8x$ est $-4x^2$.

CORRIGÉ

Forme générale. Une primitive de $x \mapsto 3x^2 - 8x + 2$ est $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 2x$. D'après l'ensemble des primitives sur l'intervalle $\mathbb{R}$, il existe un réel k tel que, pour tout réel x :

$$F(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + k.$$

Condition. On calcule :

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 - 4 + 2 + k \\ &= -1 + k. \end{aligned}$$

La condition $F(1) = 0$ s'écrit $-1 + k = 0$, d'où $k = 1$.

Contrôle. Pour tout réel x, $F'(x) = 3x^2 - 8x + 2$, et $F(1) = 1 - 4 + 2 + 1 = 0$.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$.

2.

Calculer $F(3)$.

INDICE

Début : remplace x par 3 dans l'expression trouvée.

CORRIGÉ

On remplace x par 3 dans l'expression de la question 1 :

$$\begin{aligned} F(3) &= 3^3 - 4 \times 3^2 \\ &\quad + 2 \times 3 + 1 \\ &= 27 - 36 + 6 + 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Conclusion. $F(3) = -2$.