BURHAN

Fonctions primitives

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-primitives/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions primitives	Semestre 1

Remonter de la dérivée à la fonction

Un atelier de confection fabrique des chemises. Les quantités q sont comptées en centaines de pièces, les coûts en milliers de dirhams (données fictives). On étudie la production pour $0 \leq q \leq 10$.

Le comptable connaît le **coût marginal**, c'est-à-dire la dérivée du coût total C : pour tout q de $[0;10]$, $C'(q) = 3q^2 - 12q + 20$. Il connaît aussi les **coûts fixes** : $C(0) = 15$.

Peut-il retrouver le coût total $C(q)$? Dériver, tu sais faire. Ici, il faut faire le chemin inverse.

Devine : Une prédiction

Que faut-il pour retrouver le coût total $C(q)$ de l'atelier ?

A. Le coût marginal suffit.

Faux.

Plusieurs fonctions ont ce coût marginal : elles diffèrent d'une constante.

B. Le coût marginal et les coûts fixes.

Juste.

Juste : le coût marginal donne la forme, les coûts fixes fixent la constante.

C. On ne peut pas le retrouver.

Faux.

Le chemin inverse de la dérivation existe : c'est l'objet du chapitre.

D. Il faut connaître $C(q)$ pour chaque quantité.

Faux.

Deux informations suffisent : le coût marginal et les coûts fixes.

Correction

Une fonction de dérivée $q \mapsto 3q^2 - 12q + 20$ n'est pas unique : si on lui ajoute une constante, sa dérivée ne change pas.

Le coût marginal donne donc le coût total à une constante près. Les coûts fixes $C(0) = 15$ fixent cette constante.

Tu feras le calcul complet à la fin du chapitre.

Dans ce chapitre, tu apprends à **remonter** d'une dérivée à une fonction : c'est chercher une **primitive**. Tu vérifies une primitive en dérivant.

Tu utilises un tableau de primitives usuelles, puis des règles de calcul. Tu reconnais des formes composées. Enfin, tu choisis la primitive qui vérifie une condition, comme les coûts fixes de l'atelier.

Qu'est-ce qu'une primitive ?

Remonter la dérivée

Rappel du chapitre sur la dérivation : pour n entier naturel non nul, $(x^n)' = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$. Pour m entier négatif, $(x^m)' = mx^{m-1}$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Par exemple, pour tout réel x non nul :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Enfin, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$, et la dérivée d'une constante est nulle.

Devine : Remonter une dérivée

Quelle fonction a pour dérivée $x \mapsto 4x^3$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto 12x^2$

Faux.
C'est la dérivée de $4x^3$: tu as dérivé au lieu de remonter.

B. $x \mapsto 4x^4$

Faux.
Sa dérivée est $16x^3$: le coefficient 4 est de trop.

C. $x \mapsto x^3$

Faux.
Sa dérivée est $3x^2$: l'exposant doit augmenter d'une unité.

D. $x \mapsto x^4$

Juste.
Juste : $(x^4)' = 4x^3$.

Correction
On cherche une fonction dont la dérivée est $x \mapsto 4x^3$. D'après le rappel, pour tout réel x, $(x^4)' = 4x^3$: la fonction $x \mapsto x^4$ convient.

Remonter une dérivée : c'est le sens de la définition qui suit.

Définition : Primitive d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que, pour tout x de I,

$$F'(x) = f(x).$$

Chercher une primitive de f, c'est donc chercher une fonction dont la dérivée est f.

Exemple : vérifier en dérivant

- Soit f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5$ et $F(x) = x^3 + 5x - 2$. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = 3x^2 + 5 = f(x)$. D'après la définition, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Soit g et G définies sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ et $G(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$. Pour tout $x > 0$, $G'(x) = x + \dfrac{1}{x^2} = g(x)$. Donc G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

Vérifier une primitive

Méthode : vérifier qu'une fonction est une primitive

1. **Repère** l'intervalle I sur lequel tu travailles.
2. **Calcule** $F'(x)$ sur I : dérivées usuelles, somme, produit, quotient.
3. **Confronte** $F'(x)$ à $f(x)$, pour tout x de I.
4. **Conclus** en citant l'intervalle : « F est une primitive de f sur I », ou « F n'est pas une primitive de f sur I ».

Exemple : Contre-exemple : une fonction qui n'est pas une primitive

Soit h et H définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + x$ et $H(x) = \dfrac{x^4}{4} + x$. Pour tout réel x, $H'(x) = x^3 + 1$.

En $x = 0$, $H'(0) = 1$ alors que $h(0) = 0$. Donc H n'est pas une primitive de h sur $\mathbb{R}$: une seule valeur où H' et h diffèrent suffit à conclure.

En revanche, $x \mapsto \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Vérifie : Laquelle convient ?

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 1$. Laquelle de ces fonctions est une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto 2x^3 - x + 7$

Juste.

Juste : sa dérivée est $6x^2 - 1$; la constante 7 ne gêne pas.

B. $x \mapsto 12x$

Faux.
C'est la dérivée de f, pas une primitive.

C. $x \mapsto 2x^3 - 1$

Faux.
Sa dérivée est $6x^2$: le terme -1 n'a pas été remonté.

D. $x \mapsto 6x^3 - x$

Faux.
Sa dérivée est $18x^2 - 1$: il faut diviser par l'exposant 3.

Correction
On applique la méthode sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(2x^3 - x + 7)' &= 6x^2 - 1 \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Donc $x \mapsto 2x^3 - x + 7$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Les trois autres fonctions ont pour dérivées $x \mapsto 12$, $x \mapsto 6x^2$ et $x \mapsto 18x^2 - 1$: aucune n'est égale à f.

Toujours une primitive ?

En clair. Pour $x \mapsto x^5$, tu trouves une primitive en remontant la dérivée : $x \mapsto \dfrac{x^6}{6}$.

Mais pour $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$, aucune dérivée connue ne donne cette expression. A-t-elle quand même une primitive ? Le théorème suivant répond oui, dès que la fonction est **continue** sur un intervalle.

Théorème : Existence des primitives d'une fonction continue

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Remarque

Ce résultat est admis. Tu l'utilises sans le démontrer : sa preuve demande des outils que tu n'as pas encore.

Exemple : une primitive qui existe, sans formule connue

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car son dénominateur ne s'annule jamais. D'après le théorème d'existence, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Pourtant, nos outils actuels ne permettent pas de les écrire.
- De même, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$: elle y admet des primitives. La section des primitives usuelles explique pourquoi aucune formule de ce chapitre ne convient.

À toi : Vérifier, puis trancher

Soit f, F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$, $F(x) = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + x$ et $G(x) = x^4 - 3x^2$. Vérifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. La fonction G en est-elle une ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : dérive chaque fonction sur $\mathbb{R}$, puis compare avec $f(x)$.
Indice 2
On a $\left(\dfrac{x^4}{2}\right)' = 2x^3$ et $(3x^2)' = 6x$.
Indice 3
Point délicat : pour répondre non, une seule valeur de x où les deux expressions diffèrent suffit.

Réponse
La fonction F. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{4x^3}{2} - 6x + 1 \\ &= 2x^3 - 6x + 1 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction G. Pour tout réel x, $G'(x) = 4x^3 - 6x$. En $x = 0$, $G'(0) = 0$ alors que $f(0) = 1$.

Conclusion. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$; G n'en est pas une.

Toutes les primitives d'une fonction

Une famille de courbes

Devine : Même dérivée ?

Soit F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 - 3x^2$ et $G(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Que peux-tu dire de leurs dérivées ?

A. Elles diffèrent de 2.
Faux.
La dérivée de la constante 2 est nulle : l'écart disparaît en dérivant.

B. Elles sont égales.

Juste.

Juste : toutes deux valent $3x^2 - 6x$.

C. Celle de G est le double de celle de F.

Faux.

Seule une constante a été ajoutée : rien n'a été multiplié.

D. On ne peut pas les comparer.

Faux.

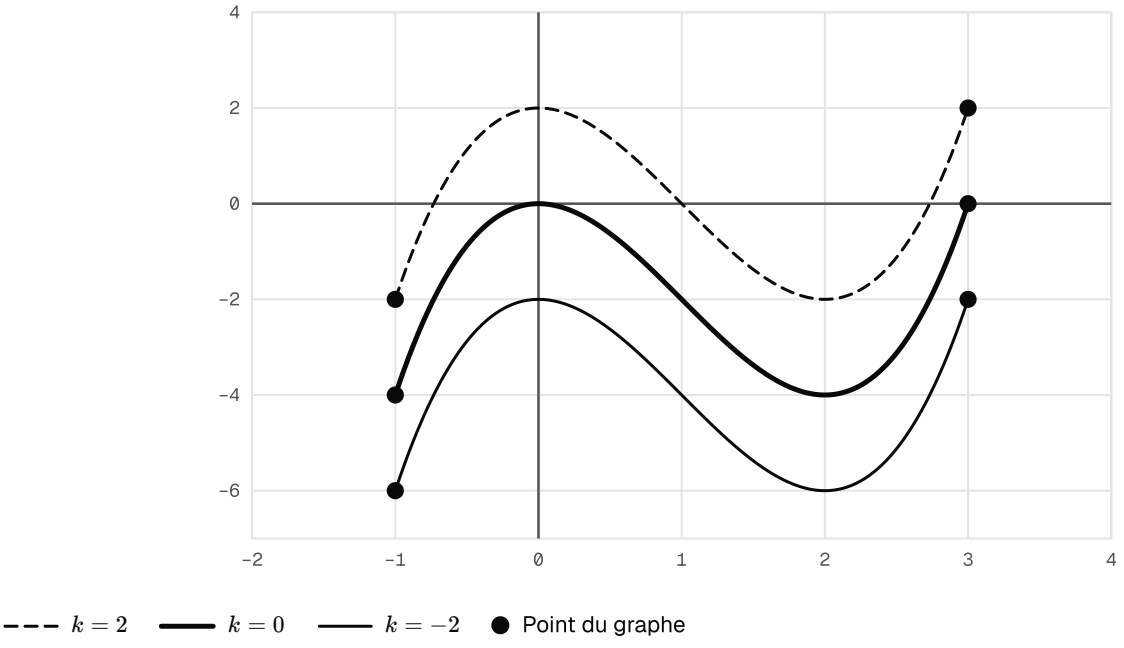
Le calcul des deux dérivées est direct.

Correction

Pour tout réel x :

$$F'(x) = 3x^2 - 6x,$$
$$G'(x) = 3x^2 - 6x + 0.$$

Les dérivées sont égales. Les deux fonctions sont donc des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 3x^2 - 6x$. La figure suivante montre leurs courbes.



Trois primitives d'une même fonction : des courbes translatées verticalement.

En clair. Les trois courbes ont la même forme : chacune se déduit d'une autre par une translation verticale. En une même abscisse, leurs tangentes ont la même pente : elles sont parallèles.

Pourquoi est-ce vrai ? Ajouter une constante ne change pas la dérivée. Réciproquement, la différence de deux primitives a une dérivée nulle.

À une constante près

Propriété : Ensemble des primitives d'une fonction

Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.

- Pour tout réel k, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ est une primitive de f sur I.
- Réciproquement, toute primitive G de f sur I s'écrit $G(x) = F(x) + k$ pour un réel k, pour tout x de I.

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent donc d'une **constante**.

Démonstration

Étape 1. Soit k un réel. La fonction $x \mapsto F(x) + k$ est dérivable sur I, de dérivée $F'(x) + 0 = f(x)$: c'est une primitive de f sur I.

Étape 2. Soit G une primitive de f sur I. La fonction $H = G - F$ est dérivable sur I, comme différence de deux fonctions dérivables sur I, et, pour tout x de I, $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Étape 3. Une fonction dont la dérivée est nulle sur un **intervalle** est constante sur cet intervalle (signe de la dérivée et variations). Il existe donc un réel k tel que $H(x) = k$, c'est-à-dire $G(x) = F(x) + k$, pour tout x de I.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On étudie la **différence** $H = G - F$ de deux primitives de f sur I. Pour tout x de I, $H'(x) = 0$.

Or, sur un **intervalle**, une dérivée nulle oblige la fonction à rester constante. Sans intervalle, cet argument tombe.

Vérifie : L'argument clé

Dans la preuve, pourquoi la fonction $H = G - F$ est-elle constante sur I ?

A. Car H est continue sur I.

Faux.
Une fonction continue peut varier : la continuité ne suffit pas.

B. Car $H(0) = 0$.

Faux.
La preuve n'utilise aucune valeur particulière de H.

C. Car H' est nulle sur l'intervalle I.

Juste.
Juste : $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$, et I est un intervalle.

D. Car H est une fonction polynôme.

Faux.

Rien n'oblige F et G à être des polynômes.

Correction

Pour tout x de I, $H'(x) = G'(x) - F'(x)$. Comme F et G sont des primitives de f sur I, on obtient $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Comme I est un intervalle et que H' y est nulle, H est constante sur I. Il existe donc un réel k tel que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + k$.

Exemple : écrire toutes les primitives

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x - 3$. La fonction F définie par $F(x) = 4x^2 - 3x$ vérifie $F'(x) = 8x - 3$ pour tout réel x : c'est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- D'après l'ensemble des primitives, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto 4x^2 - 3x + k$, où k est un réel.
- Pour $k = 5$, on obtient $x \mapsto 4x^2 - 3x + 5$; pour $k = -1$, on obtient $x \mapsto 4x^2 - 3x - 1$. Leur différence vaut 6 en toute abscisse.

Deux pièges

Attention : une primitive, pas la primitive

✗ « La primitive de $x \mapsto 8x - 3$ est $x \mapsto 4x^2 - 3x$. »

✓ Il y en a une infinité : les fonctions $x \mapsto 4x^2 - 3x + k$, où k est un réel. On écrit « une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 4x^2 - 3x$ ».

On ne dit « la primitive » que lorsqu'une condition, comme $F(1) = 2$, choisit une seule valeur de k.

Attention : toujours un intervalle

✗ « Sur l'ensemble des réels non nuls, toute primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ s'écrit $x \mapsto -\dfrac{1}{x} + k$. »

✓ Cet ensemble n'est pas un intervalle : 0 le coupe en deux morceaux. Sur $]-\infty; 0[$, tu peux prendre $k = 4$; sur $]0; +\infty[$, tu peux prendre $k = -1$. La fonction obtenue a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ des deux côtés, sans constante unique.

On travaille donc sur un seul intervalle à la fois.

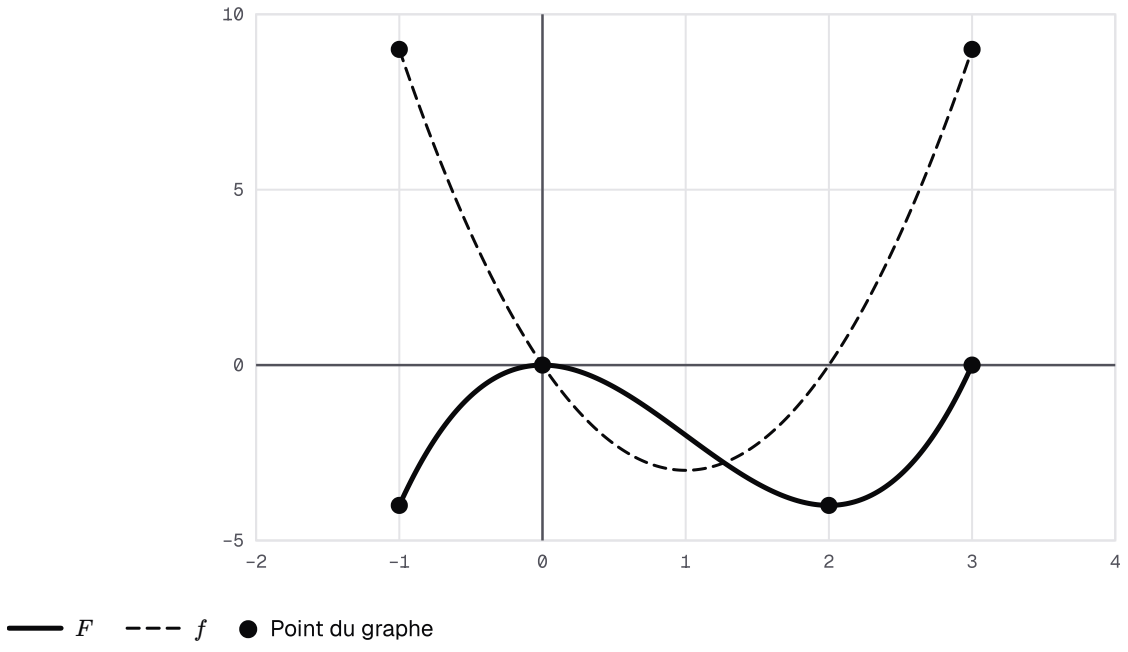
Lire les variations

Exemple : les variations d'une primitive

Reprenons f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, et la fonction F définie par $F(x) = x^3 - 3x^2$, primitive de f sur $\mathbb{R}$. On lit le signe de f :

- sur $]0;2[$, $F' = f$ est strictement négative, donc F est strictement décroissante sur $[0;2]$;
- sur $]-\infty;0[$ et sur $]2;+\infty[$, $F' = f$ est strictement positive, donc F est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$.

Le signe de F' se lit à l'intérieur de chaque intervalle. Comme F est continue aux bornes, on écrit des crochets fermés pour ses variations. Toutes les primitives $x \mapsto F(x) + k$ ont ces mêmes variations.



Une primitive F et la fonction f : la courbe de F descend là où f est négative.

Vérifie : Lire le signe

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4 - 2x$, et G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Sur quel intervalle G est-elle strictement croissante ?

A. $[2;+\infty[$

Faux.

Sur $]2;+\infty[$, g est strictement négative : G y décroît.

B. $]-\infty;2]$

Juste.

Juste : $G' = g$ est strictement positive sur $]-\infty;2[$.

C. $]-\infty;4]$

Faux.

La valeur 4 est $g(0)$, pas le point où g change de signe.

D. $\mathbb{R}$ tout entier

Faux.

La fonction g change de signe en 2 : G ne croît pas partout.

Correction

On étudie le signe de g : pour tout réel x, $g(x) > 0$ équivaut à $4 - 2x > 0$, soit $x < 2$.

- Sur $]-\infty;2[$, $G' = g$ est strictement positive, donc G est strictement croissante sur $]-\infty;2]$.
- Sur $]2;+\infty[$, $G' = g$ est strictement négative, donc G est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.

Le calcul de G est inutile.

À toi : Toutes les primitives, puis les variations

Soit f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 24$ et $F(x) = 2x^3 - 24x$. (a) Vérifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis écris toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$. (b) Donne le sens de variation de F sur $[-2;2]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour (a), dérive F ; pour (b), étudie le signe de f.

Indice 2

On a $f(x) = 6(x-2)(x+2)$.

Indice 3

Point délicat : sur $]-2;2[$, les facteurs $x-2$ et $x+2$ sont de signes contraires.

Réponse

(a) Pour tout réel x, $F'(x) = 6x^2 - 24 = f(x)$: F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. D'après l'ensemble des primitives, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto 2x^3 - 24x + k$, où k est un réel.

(b) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= 6(x^2 - 4) \\ &= 6(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Sur $]-2;2[$, $x-2<0$ et $x+2>0$: $F' = f$ est strictement négative. Donc F est strictement décroissante sur $[-2;2]$.

Primitives des fonctions usuelles

Remonter une puissance

Devine : Deviner une primitive

Quelle fonction est une primitive de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto x^4$

Faux.

Sa dérivée est $4x^3$: il reste un facteur 4 de trop.

B. $x \mapsto 3x^2$

Faux.

C'est la dérivée : tu as fait le chemin dans le mauvais sens.

C. $x \mapsto \dfrac{x^4}{4}$

Juste.

Juste : sa dérivée est $\dfrac{4x^3}{4} = x^3$.

D. $x \mapsto \dfrac{x^4}{3}$

Faux.

Sa dérivée est $\dfrac{4x^3}{3}$: on divise par le nouvel exposant.

Correction

En dérivant x^4, on obtient $4x^3$: un facteur 4 apparaît. Pour le compenser, on divise par 4. Pour tout réel x :

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{4x^3}{4} = x^3.$$

Le geste à retenir : on augmente l'exposant de 1, puis on divise par le nouvel exposant.

En clair. Pour chaque fonction usuelle, on cherche une fonction dont elle est la dérivée. La propriété suivante en rassemble cinq.

Pourquoi est-ce vrai ? Il suffit de dériver chaque primitive proposée : on retrouve la fonction de départ, sur l'intervalle indiqué.

Le tableau des primitives usuelles

Propriété : Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est une primitive de f sur l'intervalle indiqué ; k est un réel et n un entier naturel.

- $f(x) = k$: $F(x) = kx$, sur $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^n$: $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, sur $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$: $F(x) = -\dfrac{1}{x}$, sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

- $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, avec $n \geq 2$: $F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$, sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$: $F(x) = 2\sqrt{x}$, sur $]0;+\infty[$.

Démonstration

Étape 1. D'après la définition d'une primitive, il suffit de dériver chaque fonction F sur l'intervalle indiqué et de retrouver f (dérivées usuelles).

Étape 2. $(kx)' = k$ et $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \dfrac{(n+1)\,x^n}{n+1} = x^n$. Pour $n = 0$, $x^0 = 1$ et l'on retrouve la primitive $x \mapsto x$ de la première ligne.

Étape 3. Pour $n \geq 2$, sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, $-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} = -\dfrac{1}{n-1}\,x^{-(n-1)}$, de dérivée $-\dfrac{1}{n-1} \times (-(n-1))\,x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ (dérivée de $x \mapsto x^m$ pour m entier négatif). Le cas $n = 2$ donne $\left(-\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}$.

Étape 4. Pour $x > 0$, $\left(2\sqrt{x}\right)' = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Toute la preuve tient en un geste : **dériver chaque primitive proposée** et retrouver la fonction.

- Pour un inverse de puissance, on l'écrit d'abord comme une puissance d'exposant négatif, puis on applique $(x^m)' = mx^{m-1}$.
- Pour la racine carrée, on utilise $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, valable sur $]0;+\infty[$ seulement.

Vérifie : Un pas de la preuve

Suis la preuve avec $n = 3$. Pour $x \neq 0$, comment s'écrit $-\dfrac{1}{2x^2}$ avant d'être dérivée ?

A. $-\dfrac{1}{2}\,x^{-2}$

Juste.

Juste : une puissance d'exposant négatif, dérivée comme x^m.

B. $-\dfrac{1}{2}\,x^{2}$

Faux.

L'exposant doit être négatif : $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$.

C. $-2\,x^{-3}$

Faux.

Ce n'est pas la même fonction : en $x = 1$, elle vaut -2 au lieu de $-\dfrac{1}{2}$.

D. $-\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2}$

Faux.

Aucune racine carrée n'intervient dans cette ligne.

Correction

Pour tout réel x non nul, $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$. Donc $-\dfrac{1}{2x^2} = -\dfrac{1}{2}\,x^{-2}$: c'est l'écriture $-\dfrac{1}{n-1}\,x^{-(n-1)}$ de la preuve, avec $n = 3$.

On dérive cette puissance :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}\,x^{-2}\right)' &= -\frac{1}{2}\times(-2)\,x^{-3}\\ &= \frac{1}{x^3}.\end{aligned}$$

Exemple : des puissances

- Une primitive de $x \mapsto x^6$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^7}{7}$.
- Une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$: c'est le cas $n = 1$.
- Une primitive de la constante $x \mapsto -4$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -4x$.

Contrôle : pour tout réel x, $\left(\dfrac{x^7}{7}\right)' = \dfrac{7x^6}{7} = x^6$.

Inverses et racine carrée

Exemple : l'inverse d'une puissance

Cherchons une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$ sur $]0;+\infty[$. La ligne des inverses, avec $n = 5$, donne $x \mapsto -\dfrac{1}{4x^4}$.

Contrôle. Pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{4x^4} = -\dfrac{1}{4}\,x^{-4}$, donc :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{4}\,x^{-4}\right)' &= -\frac{1}{4}\times(-4)\,x^{-5}\\ &= \frac{1}{x^5}.\end{aligned}$$

Le même calcul vaut sur $]-\infty;0[$, mais jamais sur un intervalle qui contient 0.

Exemple : l'inverse de la racine carrée

Sur $]0;+\infty[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

Contrôle. Pour tout $x > 0$:

$$(2\sqrt{x})' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

En $x = 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie, et $\sqrt{x}$ n'existe pas pour $x < 0$. L'intervalle de travail est donc $]0; +\infty[$.

Attention : l'inverse n'est pas dans le tableau

✗ « Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \dfrac{x^0}{0}$, car $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$. »

✓ La règle des puissances ajoute 1 à l'exposant : avec l'exposant -1, on diviserait par 0.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$: elle y admet des primitives. Ce chapitre ne fournit pourtant aucune expression pour elles : un chapitre ultérieur s'en charge. Le tableau couvre $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ seulement pour $n \geq 2$.

À toi

Vérifie : Le bon intervalle

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2}$. Sur quel ensemble cette phrase est-elle juste ?

A. Sur $\mathbb{R}$.

Faux.

La fonction n'est pas définie en 0.

B. Sur $]0; +\infty[$ seulement.

Faux.

Le calcul vaut aussi pour $x < 0$.

C. Sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Juste.

Juste : sur chacun de ces deux intervalles, séparément.

D. Sur $[0; +\infty[$.

Faux.

En 0, ni la fonction ni sa primitive n'existent.

Correction

Avec $n = 3$, la ligne des inverses donne $x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2}$.

Contrôle. Pour tout réel x non nul, la dérivée de $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\,x^{-2}$ vaut $-\dfrac{1}{2} \times (-2)\,x^{-3}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{x^3}$.

Le résultat vaut sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, chacun séparément.

À toi : Trois primitives usuelles

Donne une primitive de chaque fonction, en précisant l'intervalle : (a) $x \mapsto x^9$; (b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$ sur $]-\infty;0[$; (c) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Repère la ligne du tableau qui correspond à chaque fonction.

Indice 2

Pour (b), prends $n = 4$ dans la ligne des inverses de puissances.

Indice 3

Point délicat : pour (c), la racine carrée impose l'intervalle $]0;+\infty[$.

Réponse

(a) Sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \dfrac{x^{10}}{10}$.

(b) Sur $]-\infty;0[$: $x \mapsto -\dfrac{1}{3x^3}$. Contrôle : pour tout $x < 0$,

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1}{3}\,x^{-3}\right)'\\&= -\frac{1}{3} \times (-3)\,x^{-4}\\&= \frac{1}{x^4}.\end{aligned}$$

(c) Sur $]0;+\infty[$: $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

À retenir : le tableau, ligne par ligne

- k a pour primitive kx, sur $\mathbb{R}$.
- x^n a pour primitive $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, sur $\mathbb{R}$.
- $\dfrac{1}{x^n}$, avec $n \geq 2$, a pour primitive $-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$, sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a pour primitive $2\sqrt{x}$, sur $]0;+\infty[$.

Pour x^n, retiens le geste : exposant plus un, puis division par le nouvel exposant.

Somme et produit par un réel

Dériver terme à terme

Devine : Une somme

Sur $\mathbb{R}$, une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$; pour $x \mapsto 1$, c'est $x \mapsto x$. Que proposes-tu pour $x \mapsto 5x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + x$

Faux.

Le coefficient 5 a disparu : la dérivée vaut $x^2 + 1$.

B. $x \mapsto \dfrac{5x^3}{3} + x$

Juste.

Juste : sa dérivée est $5x^2 + 1$.

C. $x \mapsto \dfrac{5x^3}{3} \times x$

Faux.

Une somme se remonte terme à terme, pas en multipliant.

D. $x \mapsto 10x$

Faux.

C'est la dérivée de $5x^2 + 1$, pas une primitive.

Correction

On remonte chaque terme en gardant son coefficient : $5 \times \dfrac{x^3}{3} + x$.

Contrôle. Pour tout réel x :

$$\left(\frac{5x^3}{3} + x\right)' = \frac{5 \times 3x^2}{3} + 1 = 5x^2 + 1.$$

La propriété qui suit justifie ce calcul.

En clair. Pour une somme, on additionne des primitives. Pour un multiple, on multiplie une primitive par le même réel.

Pourquoi est-ce vrai ? La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et la dérivée de αF est $\alpha F'$. Il suffit donc de dériver.

Somme et produit par un réel

Propriété : Primitive d'une somme et du produit par un réel

Soit F et G des primitives respectives de f et de g sur un intervalle I, et α un réel. Alors, sur I :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$;
- αF est une primitive de αf.

Démonstration

Étape 1. Les fonctions F et G sont dérivables sur I, de dérivées f et g (définition d'une primitive).

Étape 2. D'après les opérations sur les dérivées, $F+G$ est dérivable sur I et $(F+G)'=F'+G'=f+g$.

Étape 3. De même, αF est dérivable sur I et $(\alpha F)'=\alpha F'=\alpha f$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve repose sur les **opérations sur les dérivées** : $(F+G)'=F'+G'$ et $(\alpha F)'=\alpha F'$.

Les deux primitives doivent être prises sur le **même intervalle** I. Par exemple, $x\mapsto \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}$ remonte $x\mapsto x^2+\dfrac{1}{x^2}$ sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$, intervalles communs aux deux termes, jamais sur $\mathbb{R}$.

Aucune règle de ce type n'existe pour le produit de deux fonctions.

Vérifie : L'outil de la preuve

Quel outil la preuve utilise-t-elle pour montrer que $F+G$ est une primitive de $f+g$?

A. Le tableau des primitives usuelles.

Faux.
La preuve vaut pour toutes les fonctions, pas seulement les usuelles.

B. L'ensemble des primitives.

Faux.
Aucune constante n'intervient dans cette preuve.

C. Le théorème d'existence.

Faux.
Les primitives F et G sont données par hypothèse.

D. Les opérations sur les dérivées.

Juste.
Juste : $(F+G)'=F'+G'=f+g$.

Correction
Par hypothèse, $F'=f$ et $G'=g$ sur I. D'après les opérations sur les dérivées, $F+G$ est dérivable sur I et $(F+G)'=F'+G'=f+g$.

De même, $(\alpha F)'=\alpha F'=\alpha f$.

Fonctions polynômes

Méthode : une primitive d'une somme ou d'un polynôme

1. **Découpe** f en termes du tableau des primitives usuelles, chacun avec son coefficient. Développe d'abord si f est un produit.
2. **Remonte** chaque terme en gardant son coefficient.
3. **Additionne** les résultats et précise l'intervalle.
4. **Contrôle** en dérivant : tu dois retrouver f.

Exemple : une fonction polynôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 7$. On remonte chaque terme : une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par

$$\begin{aligned} F(x) &= 4 \times \frac{x^4}{4} - 9 \times \frac{x^3}{3} \\ &\quad + 2 \times \frac{x^2}{2} - 7x \\ &= x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout réel x, $F'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 7$, c'est-à-dire $f(x)$.

Exemple : puissances et inverses mêlés

Soit g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2x + \frac{6}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}}$. On remonte chaque terme :

- $2x$ donne x^2 ;
- $\frac{6}{x^3} = 6 \times \frac{1}{x^3}$ donne $6 \times \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$;
- $-\frac{3}{\sqrt{x}} = -3 \times \frac{1}{\sqrt{x}}$ donne $-3 \times 2\sqrt{x} = -6\sqrt{x}$.

Une primitive de g sur $]0;+\infty[$ est donc la fonction G définie par :

$$G(x) = x^2 - \frac{3}{x^2} - 6\sqrt{x}.$$

Contrôle. Pour tout $x > 0$, $G'(x) = 2x + \frac{6}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}} = g(x)$.

Le piège du produit

Attention : primitive d'un produit

✗ « Pour $x \mapsto x^2(x+1)$, une primitive est $x \mapsto \frac{x^3}{3} \times \left(\frac{x^2}{2} + x\right)$. »

✓ Une primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives. On développe d'abord : pour tout réel x, $x^2(x+1) = x^3 + x^2$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est alors $x \mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$.

Contrôle en $x = 1$: la mauvaise réponse a pour dérivée $\dfrac{13}{6}$, alors que la fonction vaut 2.

Trouve l'erreur : Une primitive à contrôler

Un élève écrit : « une primitive de $x \mapsto (x+2)(x-2)$ sur $\mathbb{R}$ est $\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\left(\dfrac{x^2}{2}-2x\right)$ ». Que penses-tu de sa réponse ?

A. Sa réponse est juste.

Faux.

En $x = 1$, la dérivée de sa fonction vaut -7, alors que la fonction vaut -3.

B. Il manque seulement une constante.

Faux.

Ajouter une constante ne corrige pas une dérivée fausse.

C. Il fallait développer : $\dfrac{x^3}{3} - 4x$.

Juste.

Juste : $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$.

D. Il fallait écrire $\left(\dfrac{x^2}{2}-2x\right)^2$.

Faux.

Un produit de primitives reste faux, même réarrangé.

Correction

Pour tout réel x, la fonction proposée vaut :

$$\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right) = \frac{x^4}{4} - 4x^2.$$

Sa dérivée est $x \mapsto x^3 - 8x$: ce n'est pas la fonction de départ.

Il faut développer : pour tout réel x, $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$. D'après la propriété somme et produit par un réel, une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 4x$.

Contrôle. Sa dérivée est $x \mapsto x^2 - 4$.

À toi : Trois primitives par la méthode

Donne une primitive de chaque fonction, sur l'intervalle indiqué : (a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10x^4 - 6x^2 + 3$; (b) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x-1)(x+3)$; (c) h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = 1 - \dfrac{8}{x^2}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : découpe, remonte, additionne, contrôle.

Indice 2

Pour (b), développe d'abord : $(2x-1)(x+3) = 2x^2 + 5x - 3$.

Indice 3

Point délicat : en (c), une primitive de $\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ est $-\dfrac{1}{x}$; attention au signe.

Réponse

(a) Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = 2x^5 - 2x^3 + 3x$. Contrôle : pour tout réel x, $F'(x) = 10x^4 - 6x^2 + 3$.

(b) On développe : $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par :

$$G(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 3x.$$

Contrôle : pour tout réel x, $G'(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

(c) Sur $]0;+\infty[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$. Le terme $-\dfrac{8}{x^2}$ donne donc $-8 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{8}{x}$. Une primitive de h sur $]0;+\infty[$ est la fonction H définie par $H(x) = x + \dfrac{8}{x}$. Contrôle : $H'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^2}$.

Formes composées

Dériver une puissance d'une fonction

Rappel du chapitre sur la dérivation, pour u dérivable sur un intervalle I :

- pour n entier naturel non nul, $(u^n)' = n\,u'u^{n-1}$;
- si u ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$;
- si $u(x) > 0$ pour tout x de I, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Devine : Une dérivée à remonter

La dérivée de $x \mapsto (x^2+5)^4$ est $x \mapsto 4 \times 2x\,(x^2+5)^3$. Quelle fonction est alors une primitive de $x \mapsto 2x\,(x^2+5)^3$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto \dfrac{(x^2+5)^4}{4}$

Juste.

Juste : on divise par 4 la fonction dont la dérivée est donnée.

B. $x \mapsto (x^2+5)^4$

Faux.

Sa dérivée a un facteur 4 de trop.

C. $x \mapsto \dfrac{(x^2+5)^3}{3}$

Faux.

L'exposant doit augmenter : 3 devient 4.

D. $x \mapsto x^2(x^2+5)^4$

Faux.

Le facteur $2x$ ne se remonte pas à part.

Correction

D'après la dérivée d'une composée, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\left((x^2+5)^4\right)'\\&= 4 \times 2x\,(x^2+5)^3.\end{aligned}$$

En divisant par 4, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{(x^2+5)^4}{4}$ est $x \mapsto 2x\,(x^2+5)^3$.

Le facteur $2x$ est la dérivée de $u : x \mapsto x^2+5$: c'est la forme $u'u^3$.

En clair. Une fonction u est à la puissance, au dénominateur ou sous une racine. Si sa dérivée u' est en facteur, on sait remonter.

Pourquoi est-ce vrai ? On dérive chaque primitive proposée avec la règle de la fonction composée : le facteur u' apparaît de lui-même.

Les formes composées

Propriété : Primitives des formes composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel. Sur I :

- $u'u^n$ admet pour primitive $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$;
- si u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\dfrac{1}{u}$ et, pour $n \geq 2$, $\dfrac{u'}{u^n}$ admet pour primitive $-\dfrac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$;
- si $u(x) > 0$ pour tout x de I, $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $2\sqrt{u}$.

De plus, si F est une primitive de f sur un intervalle J et si $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax+b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$ sur tout intervalle où $ax+b$ reste dans J.

Démonstration

Étape 1. Chaque primitive proposée s'écrit $v \circ u$. Si v est dérivable en $u(x)$, la dérivée d'une fonction composée donne $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

Étape 2. $v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, a pour dérivée t^n : on obtient $u'u^n$.

Étape 3. Pour $n \geq 2$, $v(t) = -\dfrac{1}{(n-1)\,t^{n-1}}$ a pour dérivée $\dfrac{1}{t^n}$ en tout $t \neq 0$; or u ne s'annule pas sur I : on obtient $\dfrac{u'}{u^n}$. Le cas $n = 2$, $v(t) = -\dfrac{1}{t}$, donne la ligne $\dfrac{u'}{u^2}$. De même, $v(t) = 2\sqrt{t}$ a pour dérivée $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ en tout $t > 0$; or $u > 0$ sur I : on obtient $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Étape 4. Si $a \neq 0$ et $ax + b \in J$ pour tout x d'un intervalle K, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{a}\,F(ax+b)$ sur K est $\dfrac{1}{a} \times a\,f(ax+b) = f(ax+b)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque primitive proposée s'écrit $v \circ u$. La règle $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$ fait apparaître le facteur u' : c'est pourquoi la forme exige ce facteur.

Les conditions sur u viennent de l'ensemble où v est dérivable : $t \neq 0$ pour les quotients, $t > 0$ pour la racine. Il faut donc $u(x) \neq 0$, ou $u(x) > 0$, pour tout x de I.

Vérifie : Une condition de la preuve

La preuve utilise $v(t) = 2\sqrt{t}$. Pour obtenir une primitive $2\sqrt{x^2+9}$ de $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+9}}$ sur $\mathbb{R}$, pourquoi est-il utile de savoir que $x^2 + 9 > 0$ pour tout réel x ?

A. Car v n'est dérivable que pour $t > 0$.

Juste.

Juste : $v'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ exige $t > 0$, ici $t = x^2 + 9$.

B. Car u' doit être positive.

Faux.

Ici $u'(x) = 2x$ est négative pour $x < 0$: aucune condition ne porte sur u'.

C. Car u doit être croissante.

Faux.

La fonction $x \mapsto x^2 + 9$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$, et la formule s'applique pourtant.

D. Car $x^2 + 9$ doit être entier.

Faux.

Aucune condition d'entier : seul le signe de $u(x)$ compte.

Correction

La preuve dérive $v \circ u$ avec $v(t) = 2\sqrt{t}$, dérivable en tout $t > 0$, de dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Avec $u(x) = x^2 + 9$, on a $u(x) \geq 9 > 0$ pour tout réel x : v est dérivable en $u(x)$. Alors, pour tout réel x :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Reconnaître une forme

Méthode : reconnaître une forme composée

1. **Repère** la fonction u : ce qui est à la puissance, au dénominateur ou sous la racine. Calcule u'.
2. **Compare** f avec $u'u^n$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{u^n}$ ou $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. S'il manque seulement un facteur constant c, écris $f = c \times (\text{forme})$.
3. **Applique** la formule, multipliée par c, après avoir vérifié la condition sur u, par exemple en écrivant u comme un carré plus un réel strictement positif.
4. **Contrôle** en dérivant.

Exemple : une puissance de u

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x+1)(2x^2+x-3)^5$. On pose $u(x) = 2x^2+x-3$; alors $u'(x) = 4x+1$, donc $f = u'u^5$.

D'après la formule des formes composées, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{(2x^2+x-3)^6}{6}.$$

Contrôle. Pour tout réel x :

$$F'(x) = \frac{1}{6} \times 6\,u'(x)\,u(x)^5$$
$$= u'(x)\,u(x)^5 = f(x).$$

Exemple : un quotient par le carré de u

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{10x}{(5x^2+3)^2}$. On pose $u(x) = 5x^2+3$. Pour tout réel x, $u(x) \geq 3$: u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, $u'(x) = 10x$, donc $g = \frac{u'}{u^2}$.

Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction G définie par $G(x) = -\frac{1}{5x^2+3}$.

Contrôle. Pour tout réel x, $G'(x) = \frac{10x}{(5x^2+3)^2} = g(x)$.

Racine et fonction affine

Exemple : une racine, avec un coefficient

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$. On pose $u(x) = x^2+9$: pour tout réel x, $u(x) > 0$ et $u'(x) = 2x$.

Il manque le facteur 2 : $h = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction H définie par :

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+9} \\ &= \sqrt{x^2+9}. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout réel x, $H'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = h(x)$.

Exemple : une fonction affine à l'intérieur

Soit p définie sur $]-3;+\infty[$ par $p(x) = \dfrac{1}{(2x+6)^3}$. Pour $x > -3$, on a $2x+6 > 0$.

Sur $]0;+\infty[$, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est $F : t \mapsto -\dfrac{1}{2t^2}$. Avec $a = 2$, la formule des formes composées donne une primitive P de p sur $]-3;+\infty[$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2}\,F(2x+6) \\ &= -\frac{1}{4\,(2x+6)^2}. \end{aligned}$$

Lecture par la méthode. Avec $u(x) = 2x+6$, $u'(x) = 2$: il manque le facteur 2, donc $p = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u^3}$, ce qui redonne P.

Contrôle. Pour tout $x > -3$, $P'(x) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2 \times 2}{(2x+6)^3} = p(x)$.

Attention : le facteur dérivé manquant

✗ « Une primitive de $x \mapsto (2x+7)^4$ est $x \mapsto \dfrac{(2x+7)^5}{5}$. »

✓ Avec $u(x) = 2x+7$, on a $u'(x) = 2$: il manque ce facteur. On écrit $(2x+7)^4 = \dfrac{1}{2} \times 2\,(2x+7)^4$, d'où une primitive sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \dfrac{(2x+7)^5}{10}$.

Avec un coefficient négatif, même geste : pour $x \mapsto (5-2x)^3$, $u'(x) = -2$, et une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\dfrac{(5-2x)^4}{8}$.

Si le facteur manquant dépend de x, comme pour $x \mapsto (x^2+4)^2$, aucun coefficient ne suffit : on développe.

À toi, puis le coin examen

Vérifie : Quelle forme ?

Soit q définie sur $]-1;+\infty[$ par $q(x)=\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$. Laquelle est une primitive de q sur cet intervalle ?

A. $x\mapsto -\dfrac{1}{3(x^3+1)^3}$

Faux.

Sa dérivée est $\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^4}$: l'exposant ne convient pas.

B. $x\mapsto -\dfrac{1}{x^3+1}$

Juste.

Juste : $q=\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=x^3+1$.

C. $x\mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$

Faux.

Sa dérivée est l'opposée de $q(x)$: il manque le signe moins.

D. $x\mapsto \dfrac{x^3}{(x^3+1)^2}$

Faux.

On ne remonte pas le numérateur seul.

Correction

On pose $u(x)=x^3+1$. Pour $x>-1$, $x^3>-1$, donc $u(x)>0$: u ne s'annule pas sur $]-1;+\infty[$. De plus, $u'(x)=3x^2$, donc $q=\dfrac{u'}{u^2}$.

D'après la formule des formes composées, une primitive de q sur cet intervalle est $x\mapsto -\dfrac{1}{x^3+1}$.

Contrôle. Sa dérivée est $x\mapsto \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$.

À toi : Trois formes composées

Donne une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué : (a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\,(x^2-3)^4$; (b) g définie sur $\left]-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ par $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}}$; (c) h définie sur $]4;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{3}{(x-4)^2}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour chaque fonction, repère u et calcule u'.

Indice 2

En (a), $u(x)=x^2-3$ et $u'(x)=2x$; en (b), $u(x)=3x+4$ et $u'(x)=3$.

Indice 3

Point délicat : en (a) et en (b), il manque un facteur constant ; ajuste-le avant d'appliquer la formule.

Réponse

(a) On pose $u(x) = x^2 - 3$; alors $u'(x) = 2x$ et $f = \dfrac{1}{2}\,u'u^4$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 - 3)^5}{5} \\ &= \frac{(x^2 - 3)^5}{10}. \end{aligned}$$

(b) On pose $u(x) = 3x + 4$. Pour $x > -\dfrac{4}{3}$, $u(x) > 0$, et $u'(x) = 3$: $g = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. Une primitive de g sur cet intervalle est la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{3x + 4} = \dfrac{2\sqrt{3x + 4}}{3}$.

(c) On pose $u(x) = x - 4$, qui ne s'annule pas sur $]4; +\infty[$, et $u'(x) = 1$: $h = 3 \times \dfrac{u'}{u^2}$. Une primitive de h sur cet intervalle est la fonction H définie par $H(x) = -\dfrac{3}{x - 4}$.

Contrôle. Dérive chaque résultat : tu retrouves f, g et h.

Remarque : Coin examen : rédiger une forme composée

En examen, on nomme u, on calcule u', on vérifie la condition, puis on cite la formule. Par exemple, pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$:

« On pose $u(x) = x^2 + 2x + 3$. Pour tout réel x, $u(x) = (x + 1)^2 + 2 > 0$ et $u'(x) = 2x + 2$. Ainsi $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. D'après la formule des formes composées, la fonction F définie par $F(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. »

On contrôle enfin en dérivant F.

Primitive vérifiant une condition ; situations économiques

Une courbe par un point

Devine : Une seule courbe ?

Les primitives de $x \mapsto 6x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto 3x^2 + k$. Combien d'entre elles ont une courbe qui passe par le point $A(1; 5)$?

A. Aucune.

Faux.

Pour $k = 2$, on a bien $3 \times 1^2 + 2 = 5$.

B. Deux.

Faux.

L'équation $3 + k = 5$ n'a qu'une solution.

C. Une infinité.

Faux.

Une seule valeur de k convient : $k = 2$.

D. Une seule.

Juste.

Juste : $3 \times 1^2 + k = 5$ donne $k = 2$.

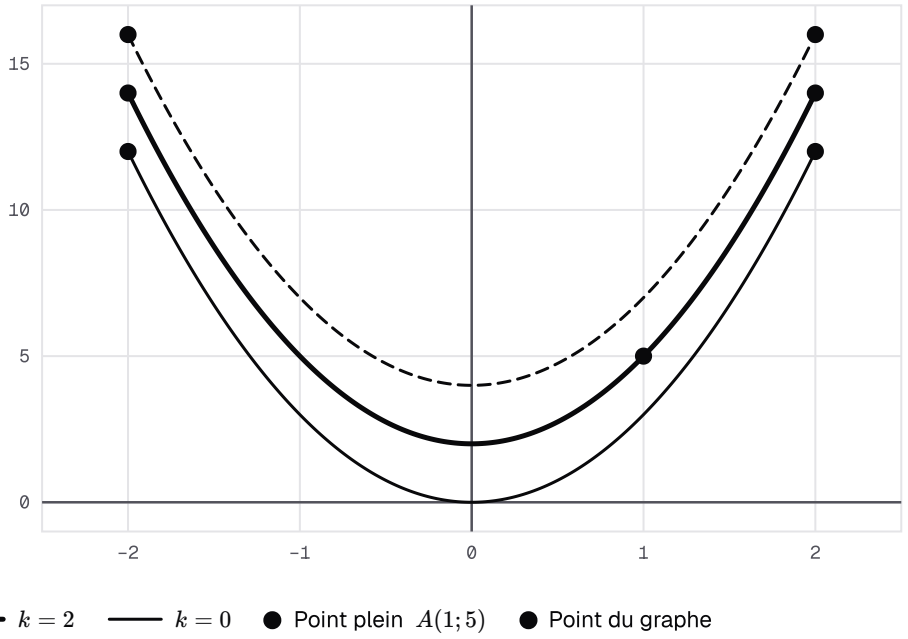
Correction

La courbe de $x \mapsto 3x^2 + k$ passe par $A(1;5)$ si et seulement si $3 \times 1^2 + k = 5$, soit $k = 2$.

Une seule primitive convient : $x \mapsto 3x^2 + 2$. Les autres courbes, translatées verticalement, passent au-dessus ou au-dessous de A.

En clair. Parmi les courbes translatées d'une même primitive, une seule passe par un point donné.

Pourquoi est-ce vrai ? Toutes les primitives diffèrent d'une constante, et la condition fixe cette constante.



Trois primitives de la fonction x ↦ 6x : seule celle de constante k = 2 passe par le point A(1 ; 5).

Une condition, une seule primitive

Propriété : Primitive vérifiant une condition initiale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel de I et y_0 un réel. Il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Étape 1. D'après le théorème d'existence, f admet une primitive G sur I.

Étape 2. D'après l'ensemble des primitives, I étant un intervalle, les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto G(x) + k$, où k est un réel.

Étape 3. Une telle primitive vérifie la condition $G(x_0) + k = y_0$ si et seulement si $k = y_0 - G(x_0)$. Il y a donc une seule valeur de k qui convient : la primitive cherchée existe et elle est unique.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve combine deux résultats : **l'existence** d'une primitive G de f sur I, puis **la forme** $x \mapsto G(x) + k$ de toutes les primitives.

La condition $F(x_0) = y_0$ devient l'équation $G(x_0) + k = y_0$, d'inconnue k. Elle a une seule solution : $k = y_0 - G(x_0)$.

Vérifie : La valeur de la constante

Suis la preuve avec des nombres : on cherche F telle que $F(2) = 5$, et une primitive G vérifie $G(2) = 1$. Quelle valeur de k donne $F = G + k$?

A. $k = -4$

Faux.

Le signe est inversé : résous $1 + k = 5$ à nouveau.

B. $k = 4$

Juste.

Juste : $G(2) + k = 5$ s'écrit $1 + k = 5$.

C. $k = 5$

Faux.

Cela supposerait $G(2) = 0$.

D. $k = 3$

Faux.

On retranche $G(2) = 1$, pas l'abscisse 2.

Correction

D'après l'ensemble des primitives, la primitive cherchée s'écrit $F(x) = G(x) + k$, avec k réel. La condition $F(2) = 5$ donne $G(2) + k = 5$, soit $1 + k = 5$, donc $k = 4$.

C'est la valeur $k = y_0 - G(x_0)$ de la preuve, avec $x_0 = 2$ et $y_0 = 5$: une seule valeur convient.

Exemple : Contre-exemple : sans intervalle, plus d'unicité

On cherche une fonction F, définie pour tout réel x non nul, telle que $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $F(1) = 0$. L'ensemble des réels non nuls n'est pas un intervalle.

- Sur $]0;+\infty[$, la condition impose $x \mapsto -\dfrac{1}{x} + 1$.
- Sur $]-\infty;0[$, la condition en 1 ne dit rien : $x \mapsto -\dfrac{1}{x} + c$ convient pour tout réel c.

L'unicité tombe : il faut un intervalle.

Trouver la constante

Méthode : la primitive qui vérifie une condition

1. **Trouve** une primitive G de f sur I.
2. **Écris** toutes les primitives : $F(x) = G(x) + k$, avec k réel.
3. **Traduis** la condition $F(x_0) = y_0$ en une équation d'inconnue k, puis résous-la.
4. **Remplace** k par sa valeur dans $F(x)$, et contrôle la condition.

Exemple : une condition initiale

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x^2}$. Cherchons la primitive F de f sur cet intervalle telle que $F(1) = 4$.

- **Une primitive.** La fonction G définie par $G(x) = x^3 + \dfrac{2}{x}$ convient : pour tout $x > 0$, $G'(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x^2}$.
- **Toutes les primitives.** $F(x) = x^3 + \dfrac{2}{x} + k$, avec k réel.
- **Condition.** $F(1) = 1 + 2 + k = 4$, donc $k = 1$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $F(x) = x^3 + \dfrac{2}{x} + 1$. Contrôle : $F(1) = 1 + 2 + 1 = 4$.

Retour à l'atelier

Méthode : retrouver une grandeur économique

1. **Identifie** la dérivée donnée, par exemple le coût marginal $C'(q)$, et la grandeur cherchée, le coût total $C(q)$.
2. **Cherche** une primitive de la dérivée sur l'intervalle des quantités étudiées.

3. **Calcule** la constante avec la donnée connue, par exemple les coûts fixes $C(0)$.
4. **Interprète** le résultat avec son unité, en rappelant que les données sont fictives.

Exemple : le coût total de l'atelier

Retour à l'atelier de l'entrée (données fictives). Pour tout q de $[0;10]$, $C'(q) = 3q^2 - 12q + 20$, et $C(0) = 15$.

- **Une primitive.** Sur $[0;10]$, une primitive de C' est $q \mapsto q^3 - 6q^2 + 20q$.
- **Toutes les primitives.** Il existe un réel k tel que, pour tout q de $[0;10]$, $C(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + k$.
- **Coûts fixes.** $C(0) = k = 15$, donc $C(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + 15$.

Pour $q = 4$: $C(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 20 \times 4 + 15$, soit $C(4) = 64 - 96 + 80 + 15 = 63$. Ainsi, produire 400 chemises coûte 63 milliers de dirhams.

Vérifie : Lire le coût total

Avec $C(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + 15$, combien coûte la production de 200 chemises, en milliers de dirhams ?

A. 8

Faux.
C'est le coût marginal $C'(2)$, pas le coût total.

B. 24

Faux.
Tu as oublié les coûts fixes : $24 + 15 = 39$.

C. 39

Juste.
Juste : $C(2) = 8 - 24 + 40 + 15 = 39$.

D. 15

Faux.
Ce sont les coûts fixes $C(0)$ seulement.

Correction
On a 200 chemises, soit 2 centaines : on calcule $C(2)$.

$$\begin{aligned} C(2) &= 2^3 - 6 \times 2^2 \\ &\quad + 20 \times 2 + 15 \\ &= 8 - 24 + 40 + 15 \\ &= 39. \end{aligned}$$

La production de 200 chemises coûte 39 milliers de dirhams (données fictives). Le nombre $C'(2) = 8$ est le coût marginal, pas le coût total.

À toi, puis le coin examen

À toi : Une primitive avec condition

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{8x}{(x^2+3)^2}$. Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Reconnais une forme composée, puis applique la méthode de la condition.

Indice 2

Avec $u(x) = x^2 + 3$, on a $u'(x) = 2x$ et $f = 4 \times \dfrac{u'}{u^2}$.

Indice 3

Point délicat : calcule $G(1)$ avant d'écrire l'équation en k.

Réponse

Une primitive. On pose $u(x) = x^2 + 3$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; alors $u'(x) = 2x$ et $f = 4 \times \dfrac{u'}{u^2}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par $G(x) = -\dfrac{4}{x^2+3}$.

La constante. D'après l'ensemble des primitives, il existe un réel k tel que, pour tout réel x, $F(x) = -\dfrac{4}{x^2+3} + k$. Or $G(1) = -\dfrac{4}{4} = -1$: la condition $F(1) = 2$ s'écrit $-1 + k = 2$, soit $k = 3$.

Conclusion. La primitive cherchée est définie par $F(x) = 3 - \dfrac{4}{x^2+3}$. Contrôle : $F(1) = 3 - 1 = 2$.

Remarque : Coin examen : du coût marginal au coût total

En examen, la question donne le résultat : « Montrer que, pour tout q de $[0;10]$, $C(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + 15$, puis que C est strictement croissante. »

Rédaction attendue : « Soit P la fonction définie sur $[0;10]$ par $P(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + 15$. Pour tout q de $[0;10]$, $P'(q) = 3q^2 - 12q + 20 = C'(q)$. Ainsi P et C sont deux primitives de C' sur l'intervalle $[0;10]$. D'après l'ensemble des primitives, il existe un réel k tel que $C(q) = P(q) + k$ pour tout q de $[0;10]$. Or $C(0) = 15 = P(0)$, donc $k = 0$ et $C = P$.

De plus, $C'(q) = 3(q-2)^2 + 8 > 0$ sur $[0;10]$. Donc C est strictement croissante sur $[0;10]$. »

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle forme

- **Vérifier** une primitive : dérive-la et compare, sur un intervalle.

- **Toutes les primitives** : une primitive plus une constante k.
- **Les variations d'une primitive** : signe de $F' = f$ sur l'intervalle, puis conclusion avec l'intervalle.
- **Un terme usuel** : le tableau ; pour x^n, exposant plus un, puis division par le nouvel exposant.
- **Une somme, un polynôme** : terme à terme, coefficients gardés ; un produit qui n'est pas une forme composée se développe d'abord.
- **Une forme composée** : repère u et u', ajuste un coefficient constant.
- **Une condition** : écris $G + k$, puis résous l'équation en k.
- **Une grandeur économique** : le coût total est une primitive du coût marginal, fixée par les coûts fixes.

Le mot du prof. Chercher une primitive, c'est dériver à l'envers. Ton meilleur contrôle reste donc toujours le même : dériver ton résultat. Les primitives te serviront encore dans un chapitre ultérieur, pour calculer de nouvelles grandeurs à partir d'une dérivée.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions primitives » (2bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)