BURHAN

Résumé : Fonctions logarithmiques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-logarithmiques/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions logarithmiques	Semestre 2

Définition, variations et signe de ln

> **À retenir : Trois réflexes sur ln**
>
> La fonction $\ln$ ne prend que des réels strictement positifs. Elle range ces réels dans le même ordre : elle est strictement croissante. Son signe bascule en 1 : négatif avant, nul en 1, positif après.

Définition : La fonction logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$; elle y admet donc des primitives. On appelle **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Ainsi $\ln$ est définie sur $]0;+\infty[$, et $\ln 1 = 0$. On écrit $\ln x$ (ou $\ln(x)$) l'image d'un réel $x > 0$; $\ln x$ n'a pas de sens si $x \leq 0$.

Propriété : Dérivée, sens de variation et signe de ln

- La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.
- Pour tout $x > 0$: $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln x > 0$ si $x > 1$.

Méthode : trouver le domaine

1. **Liste** les logarithmes présents et écris, pour chacun, que son contenu est strictement positif.
2. **Ajoute** une condition par dénominateur : il ne doit pas valoir zéro.
3. **Résous** chaque condition, puis **retiens** leur intersection : c'est le domaine.

Exemple

Énoncé. Où l'expression $\ln(12-3x) - \ln(x-1)$ a-t-elle un sens ?

Conditions. Il faut $12 - 3x > 0$, soit $x < 4$, et $x - 1 > 0$, soit $x > 1$.

Domaine. Les deux conditions ensemble donnent l'intervalle $]1;4[$.

Exemple

Énoncé. Range $\ln 0{,}75$ et $\ln 0{,}8$, puis donne leur signe.

Ordre. Comme $0{,}75 < 0{,}8$ et que $\ln$ est strictement croissante, $\ln 0{,}75 < \ln 0{,}8$.

Signe. Les deux réels sont compris entre 0 et 1 : leurs logarithmes sont strictement négatifs.

Propriétés algébriques

Théorème **: Logarithme d'un produit**

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Le logarithme transforme un produit en somme.

Propriété **: Inverse, quotient, puissance et racine carrée**

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et pour tout entier relatif n :

- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$;
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;
- $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$;
- $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Exemple

Énoncé. Calcule $A = \ln 12 + \ln 75 - 2\ln 30$.

Regroupement. On écrit tout sous un seul logarithme :

$$\begin{aligned} A &= \ln\left(\frac{12 \times 75}{30^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{900}{900}\right) \\ &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Écris $\ln 0{,}08$ et $\ln\sqrt{20}$ à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 5$.

Décomposition. $0{,}08 = \dfrac{2}{25} = \dfrac{2}{5^2}$, donc $\ln 0{,}08 = \ln 2 - 2\ln 5$.

Racine. Comme $20 = 2^2 \times 5$:

$$\begin{aligned}\ln\sqrt{20} &= \frac{1}{2}\ln 20 \\ &= \frac{1}{2}\left(2\ln 2 + \ln 5\right).\end{aligned}$$

Donc $\ln\sqrt{20} = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 5$.

Attention : Une somme sous ln reste une somme

Une somme ne se coupe pas sous ln. On a $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$, alors que $\ln(2+3) = \ln 5$, et $\ln 5 \neq \ln 6$.

De même, un quotient de logarithmes n'est pas le logarithme d'un quotient : $\dfrac{\ln 9}{\ln 3} = \dfrac{2\ln 3}{\ln 3} = 2$, mais $\ln\left(\dfrac{9}{3}\right) = \ln 3 \approx 1{,}099$.

Attention : Le carré cache un signe

Pour $x = -6$, le nombre $\ln\left(x^2\right) = \ln 36 = 2\ln 6$ existe, mais $2\ln x = 2\ln(-6)$ n'a aucun sens.

La bonne règle, pour tout réel x non nul, est $\ln\left(x^2\right) = 2\ln|x|$. Garde la valeur absolue tant que le signe de x est inconnu.

Équations, inéquations et systèmes

Méthode : équation avec ln

1. **Commence** par le domaine D de l'équation.
2. **Regroupe** chaque membre en un seul logarithme : $\ln A = \ln B$. Si le second membre est un entier m, écris $m = \ln\left(\mathrm{e}^m\right)$. Pour tout réel m, l'équation $\ln A = m$ a une seule solution $A > 0$.
3. **Enlève** les logarithmes : $A = B$, puis résous.
4. **Trie** les solutions : seules celles de D sont gardées.

Méthode : inéquation avec ln

1. **Commence** par le domaine D.
2. **Écris** l'inéquation sous la forme $\ln A \leq \ln B$ (ou avec $<$).
3. **Remplace** par $A \leq B$: la fonction $\ln$ est strictement croissante, l'ordre reste le même.
4. **Croise** le résultat avec D et donne la réponse en intervalle.

Méthode : système avec ln

1. **Pose** les conditions d'existence, par exemple $x > 0$ et $y > 0$.
2. **Change** d'inconnues : $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Chaque équation devient du premier degré.
3. **Résous** ce système linéaire, par substitution ou par combinaison.
4. **Reviens** à x et y : $\ln x = X$ donne un seul réel x strictement positif.

Exemple

Énoncé. Résous $\ln(x+3) + \ln(x-1) = \ln 12$.

Domaine. Il faut $x + 3 > 0$ et $x - 1 > 0$, soit $x > -3$ et $x > 1$: $D =]1; +\infty[$.

Calcul. Pour tout $x \in D$, l'équation équivaut à $(x+3)(x-1) = 12$, soit $x^2 + 2x - 15 = 0$. Ce trinôme se factorise en $(x-3)(x+5)$: ses racines sont 3 et -5.

Tri. Seul 3 est dans D : l'ensemble des solutions est $\{3\}$.

Exemple

Énoncé. Résous $\ln(2x-1) \leq \ln(x+4)$.

Domaine. Il faut $x > \dfrac{1}{2}$ et $x > -4$: $D = \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

Ordre. Sur D, l'inéquation équivaut à $2x - 1 \leq x + 4$, soit $x \leq 5$.

Réponse. $S = \left]\dfrac{1}{2}; 5\right]$.

Exemple

Énoncé. Résous, avec $x > 0$ et $y > 0$, le système :

$$\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ \ln x - \ln y = -1 \end{cases}$$

Changement d'inconnues. Avec $X = \ln x$ et $Y = \ln y$: $2X + Y = 7$ et $X - Y = -1$. En ajoutant, $3X = 6$, donc $X = 2$, puis $Y = 3$.

Retour. $\ln x = 2$ et $\ln y = 3$: le couple solution est $\left(\mathrm{e}^2; \mathrm{e}^3\right)$.

Attention : Une racine trouvée n'est pas toujours solution

Pour $\ln(x-2) + \ln(x-4) = \ln 3$, le regroupement donne $(x-2)(x-4) = 3$, soit $x^2 - 6x + 5 = 0$, de racines 1 et 5.

Or l'équation exige $x > 4$. Le réel 1 est donc rejeté : $\ln(1-2)$ n'existe pas. Seul 5 est solution.

Limites et nombre e

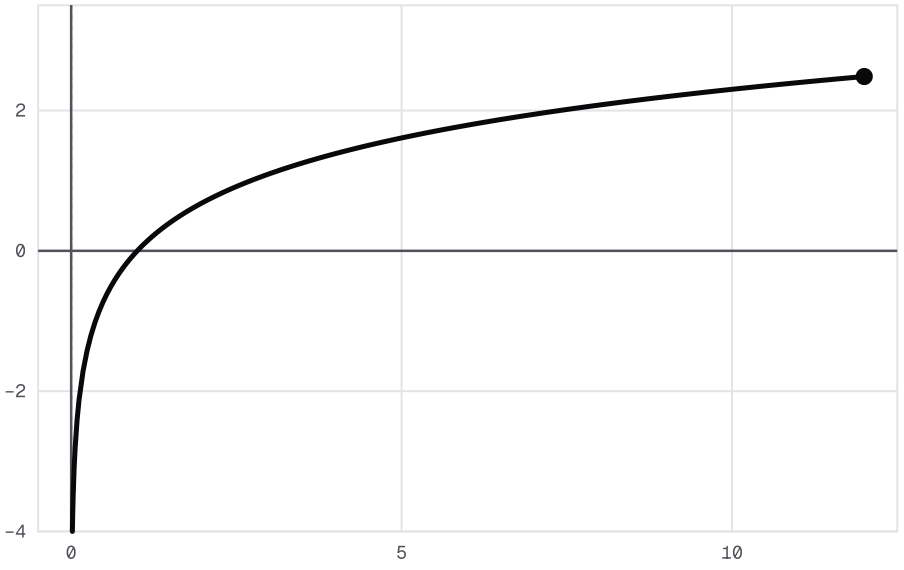
Propriété : Limites de ln aux bornes de son domaine

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est donc asymptote à la courbe de $\ln$.



La courbe de ln descend sans fin le long de l'axe des ordonnées et monte sans borne, très lentement, vers la droite.

Propriété : Le nombre e

Pour tout réel m, l'équation $\ln x = m$ admet **une unique solution** dans $]0; +\infty[$.

On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln \mathrm{e} = 1$. On a $\mathrm{e} \approx 2{,}718$, et, pour tout entier relatif n, $\ln(\mathrm{e}^n) = n$.

Propriété : Croissances comparées

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0.$$

En particulier, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$: au voisinage de $+\infty$, $\ln x$ est négligeable devant x.

Méthode : limite avec ln

1. **Teste** d'abord les règles de calcul sur les limites, avec les limites de $\ln$ en 0^+ et en $+\infty$.
2. **Repère** une forme indéterminée. Pour la lever, mets en facteur le terme dominant, ou transforme l'expression vers une limite connue.
3. **Rédige** en citant la limite connue utilisée.

Exemple

En $+\infty$. $3x - 4\ln x$ est une forme indéterminée. On factorise : pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} &3x - 4\ln x \\ &= x\left(3 - 4\times\frac{\ln x}{x}\right). \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0, donc la parenthèse tend vers 3 et l'expression vers $+\infty$.

En 0^+. D'après les croissances comparées, $x^2\ln x$ tend vers 0, donc $x^2\ln x + 4$ tend vers 4.

Pas d'indétermination. En 0^+, $\dfrac{\ln x}{x} = \ln x \times \dfrac{1}{x}$, où $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\dfrac{1}{x}$ vers $+\infty$: le produit tend vers $-\infty$.

Exemple

Équation. $\ln x = -2$ a une seule solution : $x = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$.

Calcul. $\ln\left(\mathrm{e}^5\right) - \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 5 - 2 = 3$.

Nombre dérivé en 1 et courbe de ln

Propriété : Limites liées au nombre dérivé de ln en 1

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Exemple

Changement de variable. Soit $x \neq 0$ avec $1+3x>0$. On pose $h=3x$:

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

Quand x tend vers 0, h aussi : la limite vaut 3.

Facteur. Pour $x>0$ et $x \neq 1$:

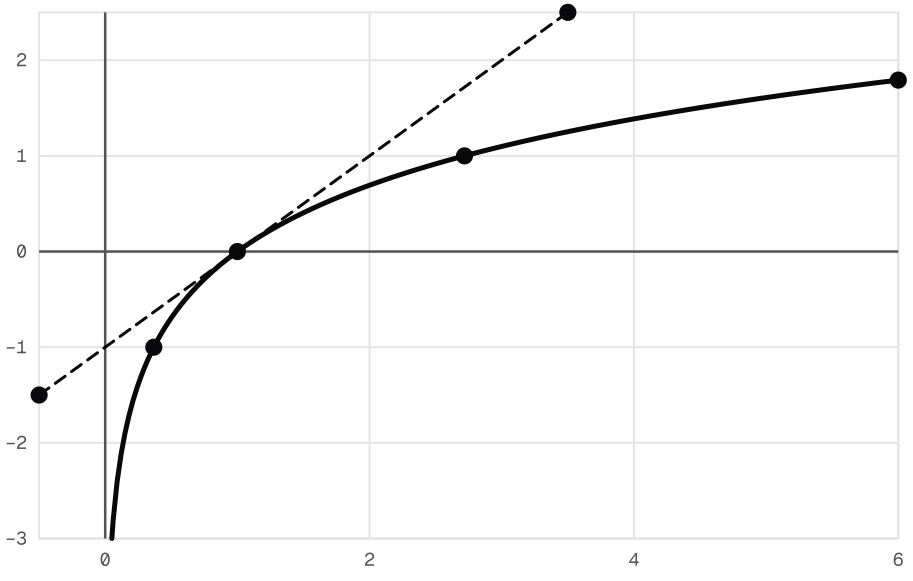
$$\frac{\ln x}{2x-2} = \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x-1}.$$

Cette expression tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1.

Propriété : Courbe représentative de ln

Dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $\ln$:

- coupe l'axe des abscisses au point $(1;0)$ et passe par le point $(\mathrm{e};1)$;
- admet au point d'abscisse 1 la tangente d'équation $y=x-1$;
- admet l'axe des ordonnées pour asymptote ;
- admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.



$\mathcal{C}$ $y=x-1$ Point plein $\left(\frac{1}{\mathrm{e}};-1\right)$ Point plein $(1;0)$ Point plein $(\mathrm{e};1)$ Point du graphe

Les trois points repères de la courbe de ln, d'abscisses 1/e, 1 et e, avec la tangente en 1.

À retenir : Tracer la courbe de ln

> Pour tracer la courbe de $\ln$, place d'abord trois points : $\left(\frac{1}{\mathrm{e}};-1\right)$, $(1;0)$ et $(\mathrm{e};1)$. Ajoute la tangente $y=x-1$ en 1. La courbe longe l'axe des ordonnées vers le bas, puis monte de plus en plus lentement.

Dérivée de ln u et primitives de u'/u

Théorème : Dérivée de ln u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $u(x)>0$ pour tout $x\in I$, la fonction $x\mapsto \ln\left(u(x)\right)$ est dérivable sur I et $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.
- Si u ne s'annule pas sur I et garde un signe constant ($u>0$ sur I, ou $u<0$ sur I), la fonction $x\mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $(\ln|u|)'=\dfrac{u'}{u}$.

Propriété : Primitives de u'/u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, qui ne s'annule pas et garde un signe constant sur I. Les primitives sur I de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sont les fonctions

$$x\mapsto \ln|u(x)|+c,$$

où c est un nombre réel. Si $u>0$ sur I, on peut écrire $\ln\left(u(x)\right)+c$.

Méthode : étudier une fonction avec ln u

1. **Domaine** : $u(x)>0$ pour $\ln u$, et $u(x)\neq 0$ pour $\ln|u|$.
2. **Limites** aux bornes du domaine, puis asymptotes éventuelles.
3. **Dérivée** par $\dfrac{u'}{u}$; son signe donne le tableau de variations.
4. **Courbe** : tangentes utiles, points remarquables, asymptotes, puis tracé.

Méthode : primitive de la forme u'/u

1. **Cherche** la fonction u du dénominateur et vérifie qu'elle ne s'annule pas sur l'intervalle.
2. **Dérive** u et compare u' au numérateur : il faut un numérateur égal à $k\,u'$, avec k réel.
3. **Conclus** : une primitive est $k\ln|u|$, que l'on écrit $k\ln u$ lorsque $u>0$.

Exemple

Énoncé. Dérive $x\mapsto \ln\left(2x^2+5\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Ici $u : x \mapsto 2x^2 + 5$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 4x$. La dérivée est $x \mapsto \dfrac{4x}{2x^2 + 5}$.

Exemple

Sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $x^2 + 7 > 0$ et $\dfrac{x}{x^2 + 7} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2 + 7}$. Une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\left(x^2 + 7\right)$.

Sur $\left]-\infty ; \dfrac{5}{2}\right[$. On a $2x - 5 < 0$ et $\dfrac{4}{2x - 5} = 2 \times \dfrac{2}{2x - 5}$. Une primitive est $x \mapsto 2\ln|2x - 5|$, c'est-à-dire $x \mapsto 2\ln(5 - 2x)$.

Attention : Le facteur u' change tout

Sur $]-\infty ; 4[$, la dérivée de $x \mapsto \ln(4 - x)$ vaut en x : $\dfrac{-1}{4 - x}$.

Écrire $\dfrac{1}{4 - x}$ oublie la dérivée de $4 - x$, qui vaut -1 : le signe devient faux, et le sens de variation aussi.

Attention : La valeur absolue sauve la primitive

Sur $]-\infty ; -1[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{x + 1}$ est $x \mapsto 3\ln|x + 1|$, c'est-à-dire $x \mapsto 3\ln(-x - 1)$.

L'écriture $3\ln(x + 1)$ est interdite sur cet intervalle : $x + 1$ y est strictement négatif.

Logarithme de base a et logarithme décimal

Définition : Logarithme de base a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle **fonction logarithme de base a**, notée $\log_a$, la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Le logarithme de base 10 est le **logarithme décimal**, noté $\log$: pour tout $x > 0$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. Le logarithme de base e est le logarithme népérien : $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$.

Propriété : Propriétés du logarithme de base a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, et $\log_a\left(a^n\right) = n$ pour tout entier relatif n ; en particulier $\log\left(10^n\right) = n$.
- Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout entier relatif n : $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a\left(x^n\right) = n \log_a x$.

- $\log_a$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$: elle est strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Exemple

Calculs.

- $\log_2 32 = \log_2 \left(2^5\right) = 5$;
- $\log 0{,}001 = \log \left(10^{-3}\right) = -3$;
- $\log_3 \left(\dfrac{1}{9}\right) = \log_3 \left(3^{-2}\right) = -2$.

Propriété **: Logarithme décimal et équations du type 10^x = a**

Le logarithme décimal $\log = \log_{10}$ est celui de la classe de 1re année : $\log 10 = 1$ et il transforme un produit en somme. Pour tout réel x et tout réel $a > 0$:

$$10^x = a \Leftrightarrow x = \log a$$
$$10^x \leq a \Leftrightarrow x \leq \log a$$
$$10^x \geq a \Leftrightarrow x \geq \log a$$

Pour $a \leq 0$, l'équation $10^x = a$ n'a aucune solution, car $10^x > 0$.

Exemple

Équation. $10^x = 600$ équivaut à $x = \log 600 \approx 2{,}778$.

Inéquation. $10^x \leq 0{,}03$ équivaut à $x \leq \log 0{,}03$, avec $\log 0{,}03 \approx -1{,}523$.

Méthode **: résoudre une inéquation en puissance**

1. **Isole** la puissance : $q^n \geq a$, avec $q > 0$ et $a > 0$.
2. **Prends** le logarithme des deux membres, qui garde l'ordre : $n \ln q \geq \ln a$.
3. **Divise** par $\ln q$ après avoir regardé son signe : positif si $q > 1$, négatif si $0 < q < 1$.
4. **Réponds** par un entier quand n compte des années ou des mois.

Exemple

Situation fictive. Le prix d'un ordinateur portable baisse de 8 pour cent par an : il est multiplié par $0{,}92$ en un an. Quand vaut-il au plus la moitié de son prix de départ ?

Inéquation. Comme $\ln$ conserve l'ordre, $0{,}92^n \leq 0{,}5$ équivaut à $n \ln 0{,}92 \leq \ln 0{,}5$. Or $\ln 0{,}92 < 0$: on divise et l'ordre change, donc :

$$n \geq \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}92} \approx 8{,}31.$$

Réponse. Le prix atteint au plus la moitié de son prix de départ au bout de 9 ans.

Attention : Un logarithme négatif retourne l'inégalité

De $0{,}8^n < 0{,}3$, on tire $n \ln 0{,}8 < \ln 0{,}3$. Le nombre $\ln 0{,}8$ est négatif : la division retourne l'inégalité, et :

$$n > \frac{\ln 0{,}3}{\ln 0{,}8} \approx 5{,}40.$$

Garder le sens donnerait $n = 1$ comme solution. C'est absurde : $0{,}8$ n'est pas inférieur à $0{,}3$.

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Domaine** d'une expression : chaque contenu de $\ln$ strictement positif.
- **Simplifier** : produit, quotient, puissance et racine passent en somme, différence et facteur.
- **Équation** : se ramener à $\ln A = \ln B$, puis trier les solutions.
- **Inéquation** : se ramener à $\ln A \leq \ln B$, garder l'ordre, croiser avec le domaine.
- **Système** : changer d'inconnues, $X = \ln x$ et $Y = \ln y$.
- **Limite indéterminée** : factoriser, ou utiliser une limite connue.
- **Dérivée** de $\ln u$: $\dfrac{u'}{u}$.
- **Primitive** d'un quotient : chercher la forme $k\dfrac{u'}{u}$.
- **Puissance** q^n ou 10^x : prendre $\ln$ ou $\log$, regarder le signe avant de diviser.

Produit, pour a > 0 et b > 0

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Quotient

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Puissance, n entier relatif

$$\ln\left(a^n\right) = n \ln a$$

Nombre e

$$\ln \mathrm{e} = 1$$

Dérivée, u > 0

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Base a, a > 0 et a différent de 1

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Puissance de 10, a > 0

$$10^x = a \Leftrightarrow x = \log a$$