BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Niveau examen	5

Exercice 1 — 3 pts

Une équation, une inéquation et un système

On considère l'équation (E) : $\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln(4x-2)$.

1. — 0,5 pts

Montrer que l'équation (E) a un sens si et seulement si $x>1$.

INDICE

Outil : écris une condition par logarithme, puis prends leur intersection.

2. — 1 pts

Montrer que, pour $x>1$, l'équation (E) équivaut à $x^2-3x=0$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

INDICE

Début : regroupe le membre de gauche en un seul logarithme. **Point délicat :** une des racines n'est pas dans le domaine.

3. — 0,5 pts

Montrer que l'ensemble des solutions dans $]0;+\infty[$ de l'inéquation $\ln x+\ln 4<\ln(x+9)$ est $]0;3[$.

INDICE

Outil : $\ln x+\ln 4=\ln(4x)$, puis la stricte croissance de $\ln$.

4. — 1 pts

On considère le système (S) formé des équations $\ln x+2\ln y=7$ et $3\ln x-\ln y=0$, avec $x>0$ et $y>0$. En posant $X=\ln x$ et $Y=\ln y$, montrer que $X=1$ et $Y=3$. En déduire la solution de (S).

INDICE

Début : la seconde équation donne Y en fonction de X ; remplace dans la première.

Exercice 2 — 2,5 pts

Quatre limites d'une même fonction

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3+2\ln x}{x}$.

1. — 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

INDICE

Outil : écris $f(x)=(3+2\ln x)\times\dfrac{1}{x}$ et cherche la limite de chaque facteur.

2. — 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. En déduire une asymptote à la courbe de f.

INDICE

Début : coupe la fraction : $\dfrac{3}{x}+2\times\dfrac{\ln x}{x}$.

3. — 0,75 pts

Vérifier que, pour $x>0$, $f(x)-3=\dfrac{2\ln x-3(x-1)}{x}$. En déduire que, pour $x>0$ et $x\neq 1$, $\dfrac{f(x)-3}{x-1}=\dfrac{1}{x}\left(2\times\dfrac{\ln x}{x-1}-3\right)$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=-1$.

INDICE

Début : divise chaque terme du numérateur par $x-1$. **Outil :** la limite de $\dfrac{\ln x}{x-1}$ en 1.

4. — 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 f(x)=0$.

INDICE

Début : simplifie $x^2 f(x)$. **Outil :** la limite de $x\ln x$ en 0^+.

Exercice 3 — 4 pts

Le bénéfice d'un atelier de sacs

Un atelier fabrique et vend x centaines de sacs par mois, avec $0 \leq x \leq 12$. Son bénéfice mensuel, en milliers de dirhams, est $B(x) = 8\ln(x+1) - x - 3$. Ces données sont fictives.

1. — 0,5 pts

Calculer $B(0)$ et interpréter le résultat.

INDICE

Outil : $\ln 1 = 0$.

2. — 1,25 pts

Montrer que, pour tout x de $[0;12]$, $B'(x) = \dfrac{7-x}{x+1}$.

INDICE

Outil : la dérivée de $\ln(x+1)$ est $\dfrac{1}{x+1}$. **Ensuite :** réduis au même dénominateur.

3. — 1,25 pts

Dresser le tableau de variations de B sur $[0;12]$. Montrer que le bénéfice maximal vaut $24\ln 2 - 10$ milliers de dirhams. En déduire sa valeur arrondie au dirham.

INDICE

Début : le dénominateur $x+1$ est positif ; le signe de $B'(x)$ est celui de $7-x$. **Point délicat :** écris $8\ln 8$ à l'aide de $\ln 2$.

4. — 1 pts

Montrer que $B(1) = \ln 256 - 4$. On rappelle que $4 = \ln\left(\mathrm{e}^4\right)$ et l'on admet que $\mathrm{e}^4 < 55$: en déduire que $B(1) > 0$ et interpréter.

INDICE

Outil : $8\ln 2 = \ln\left(2^8\right)$. **Ensuite :** compare e^4 et 256, puis leurs logarithmes.

Exercice 4 3 pts

Un capital placé à intérêts composés

Un épargnant place un capital fictif de $20\,000$ dirhams à intérêts composés, au taux annuel de 4 pour cent : d'une année à la suivante, le capital est multiplié par $1{,}04$. On note C_n le capital, en dirhams, au bout de n années, avec n entier naturel.

1. 0,5 pts

Calculer C_1 et C_2. Montrer que $C_n = 20\,000 \times 1{,}04^n$.

INDICE

Outil : d'une année à la suivante, on multiplie par le même coefficient : reconnais une suite géométrique.

2. 1 pts

Montrer que $C_n \geq 30\,000$ équivaut à $n \geq \dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}04}$. En déduire au bout de combien d'années le capital atteint au moins $30\,000$ dirhams.

INDICE

Début : divise par $20\,000$, puis applique $\ln$. **Point délicat :** le signe de $\ln 1{,}04$ avant de diviser.

3. 0,75 pts

À l'aide du logarithme décimal, montrer que $C_n \geq 200\,000$ équivaut à $n \geq \dfrac{1}{\log 1{,}04}$. En déduire au bout de combien d'années le capital est multiplié par 10.

INDICE

Outil : $\log\left(1{,}04^n\right) = n \log 1{,}04$ et $\log 10 = 1$.

4. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^x = 1{,}04$, puis l'inéquation $10^x \geq 1{,}5$. Donner les valeurs approchées utiles à 10^{-4} près.

INDICE

Outil : pour $a > 0$, $10^x = a$ équivaut à $x = \log a$, et $10^x \geq a$ à $x \geq \log a$.

Exercice 5 8 pts

Étude complète d'une fonction avec ln

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-3+2\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=x-3$.

1. 1 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}$.

INDICE

Début : cherche d'abord la limite de $\dfrac{x}{x+1}$ quand x tend vers 0^+.

2. 1,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-3)\right)=0$. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

INDICE

Début : pour $x>0$, écris $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$. **Outil :** $\ln 1=0$.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x)-(x-3)<0$. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

INDICE

Outil : compare $\dfrac{x}{x+1}$ à 1, puis utilise le signe de $\ln$.

4. 1,25 pts

On pose $u(x)=\dfrac{x}{x+1}$ pour $x>0$. Montrer que $u'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$, puis que $f'(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x(x+1)}$. En déduire le sens de variation de f.

INDICE

Outil : $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$. **Début :** écris $u(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$ pour dériver u.

5. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$. On donne $f(3{,}4)\approx -0{,}116$ et $f(3{,}6)\approx 0{,}110$: en déduire que $3{,}4<\alpha<3{,}6$.

INDICE

Outil : une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle y prend une seule fois chaque valeur de son image. **Ensuite :** utilise les limites des questions 1 et 2.

6. 1,25 pts

Montrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2x - 4 - 2\ln 2$. Tracer $\mathcal{D}$, T et $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. **Point délicat :** $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

7. 1,5 pts

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x}$. Montrer que g est de la forme $\dfrac{u'}{u}$. En déduire la primitive G de g sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1, et montrer que $G(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+x}{2}\right)$.

INDICE

Début : dérive $u(x) = x^2 + x$ et vérifie son signe sur $]0;+\infty[$. **Point délicat :** la constante est fixée par $G(1) = 0$.