BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Une équation, une inéquation et un système

On considère l'équation (E) : $\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln(4x-2)$.

1. 0,5 pts

Montrer que l'équation (E) a un sens si et seulement si $x>1$.

INDICE

Outil : écris une condition par logarithme, puis prends leur intersection.

CORRIGÉ

Conditions. (E) a un sens si et seulement si les trois logarithmes existent :

- $x-1>0$, soit $x>1$;
- $x+2>0$, soit $x>-2$;
- $4x-2>0$, soit $x>\dfrac{1}{2}$.

Intersection. Comme $-2<\dfrac{1}{2}<1$, un réel vérifie les trois conditions si et seulement si $x>1$.

Conclusion. L'équation (E) a un sens si et seulement si $x>1$, c'est-à-dire sur $]1;+\infty[$.

2. 1 pts

Montrer que, pour $x>1$, l'équation (E) équivaut à $x^2-3x=0$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

INDICE

Début : regroupe le membre de gauche en un seul logarithme. **Point délicat :** une des racines n'est pas dans le domaine.

CORRIGÉ

Regroupement. Soit $x>1$. Alors $x-1>0$ et $x+2>0$; le logarithme d'un produit donne

$$\begin{aligned}&\ln(x-1)+\ln(x+2)\\&=\ln\left((x-1)(x+2)\right).\end{aligned}$$

Équivalence. Pour $x>1$, $(x-1)(x+2)>0$ et $4x-2>0$. Par stricte croissance de $\ln$, pour $A>0$ et $B>0$, $\ln A=\ln B$ équivaut à $A=B$. Donc (E) équivaut à $(x-1)(x+2)=4x-2$.

Développement. $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$: l'équation s'écrit $x^2+x-2=4x-2$, soit $x^2-3x=0$.

Racines. $x^2-3x=x(x-3)$ s'annule en 0 et en 3.

Conclusion. Pour $x>1$, (E) équivaut à $x^2-3x=0$. Le réel 0 n'est pas dans $]1;+\infty[$, le réel 3 y est : $S=\{3\}$.

3. 0,5 pts

Montrer que l'ensemble des solutions dans $]0;+\infty[$ de l'inéquation $\ln x + \ln 4 < \ln(x+9)$ est $]0;3[$.

INDICE

Outil : $\ln x + \ln 4 = \ln(4x)$, puis la stricte croissance de $\ln$.

CORRIGÉ

Transformation. Soit $x > 0$. Le logarithme d'un produit donne $\ln x + \ln 4 = \ln(4x)$: l'inéquation s'écrit $\ln(4x) < \ln(x+9)$, avec $4x > 0$ et $x + 9 > 0$.

Ordre. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$: l'inéquation équivaut à $4x < x + 9$, soit $3x < 9$, c'est-à-dire $x < 3$.

Conclusion. Dans $]0;+\infty[$, l'ensemble des solutions est $S =]0;3[$.

4. 1 pts

On considère le système (S) formé des équations $\ln x + 2\ln y = 7$ et $3\ln x - \ln y = 0$, avec $x > 0$ et $y > 0$. En posant $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, montrer que $X = 1$ et $Y = 3$. En déduire la solution de (S).

INDICE

Début : la seconde équation donne Y en fonction de X ; remplace dans la première.

CORRIGÉ

Système linéaire. Avec $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, le système devient

$$\begin{cases} X + 2Y = 7 \\ 3X - Y = 0 \end{cases}$$

Résolution. La seconde équation donne $Y = 3X$. Dans la première : $X + 6X = 7$, soit $7X = 7$, donc $X = 1$, puis $Y = 3$.

Retour. $\ln x = 1$ donne $x = \mathrm{e}$, et $\ln y = 3$ donne $y = \mathrm{e}^3$: ces deux réels sont strictement positifs.

Conclusion. $X = 1$ et $Y = 3$; le système (S) a pour unique solution le couple $\left(\mathrm{e};\mathrm{e}^3\right)$.

Exercice 2 — 2,5 pts

Quatre limites d'une même fonction

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3+2\ln x}{x}$.

1. — 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

INDICE

Outil : écris $f(x)=(3+2\ln x)\times\dfrac{1}{x}$ et cherche la limite de chaque facteur.

CORRIGÉ

Écriture. Pour $x>0$, $f(x)=(3+2\ln x)\times\dfrac{1}{x}$.

Limite de chaque facteur. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, donc $3+2\ln x$ tend vers $-\infty$. De plus, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. Le produit tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty.$$

2. — 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. En déduire une asymptote à la courbe de f.

INDICE

Début : coupe la fraction : $\dfrac{3}{x}+2\times\dfrac{\ln x}{x}$.

CORRIGÉ

Découpage. Pour $x>0$:

$$f(x)=\frac{3}{x}+2\times\frac{\ln x}{x}.$$

Limite. En $+\infty$, $\dfrac{3}{x}$ tend vers 0 ; d'après les croissances comparées, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend aussi vers 0. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Conclusion. La droite d'équation $y=0$, l'axe des abscisses, est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

3. 0,75 pts

Vérifier que, pour $x > 0$, $f(x) - 3 = \dfrac{2\ln x - 3(x-1)}{x}$. En déduire que, pour $x > 0$ et $x \neq 1$, $\dfrac{f(x)-3}{x-1} = \dfrac{1}{x}\left(2 \times \dfrac{\ln x}{x-1} - 3\right)$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-3}{x-1} = -1$.

INDICE

Début : divise chaque terme du numérateur par $x-1$. **Outil :** la limite de $\dfrac{\ln x}{x-1}$ en 1.

CORRIGÉ

Vérification. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= \frac{3 + 2\ln x - 3x}{x} \\ &= \frac{2\ln x - 3(x-1)}{x}. \end{aligned}$$

Transformation. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on divise par $x-1$:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x)-3}{x-1} \\ &= \frac{2\ln x - 3(x-1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{1}{x}\left(2 \times \frac{\ln x}{x-1} - 3\right). \end{aligned}$$

Limite. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\dfrac{1}{x}$ tend vers 1. La limite vaut donc

$$1 \times (2 - 3) = -1.$$

Conclusion. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-3}{x-1} = -1$.

4. 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 f(x) = 0$.

INDICE

Début : simplifie $x^2 f(x)$. **Outil :** la limite de $x\ln x$ en 0^+.

CORRIGÉ

Simplification. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^2 f(x) &= x(3 + 2\ln x) \\ &= 3x + 2x\ln x. \end{aligned}$$

Limite. $3x$ tend vers 0, et, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 f(x) = 0$.

Exercice 3 4 pts

Le bénéfice d'un atelier de sacs

Un atelier fabrique et vend x centaines de sacs par mois, avec $0 \leq x \leq 12$. Son bénéfice mensuel, en milliers de dirhams, est $B(x) = 8\ln(x+1) - x - 3$. Ces données sont fictives.

1. 0,5 pts

Calculer $B(0)$ et interpréter le résultat.

INDICE

Outil : $\ln 1 = 0$.

CORRIGÉ

Calcul. Comme $\ln 1 = 0$:

$$B(0) = 8\ln 1 - 0 - 3 = -3.$$

Interprétation. Sans aucune vente, l'atelier perd 3 milliers de dirhams par mois, soit $3\,000$ dirhams.

2. 1,25 pts

Montrer que, pour tout x de $[0;12]$, $B'(x) = \dfrac{7-x}{x+1}$.

INDICE

Outil : la dérivée de $\ln(x+1)$ est $\dfrac{1}{x+1}$. **Ensuite :** réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Dérivée. Sur $[0;12]$, $x+1>0$, et la dérivée de $x \mapsto \ln(x+1)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$. Donc :

$$\begin{aligned} B'(x) &= \frac{8}{x+1} - 1 \\ &= \frac{8-(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{7-x}{x+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $[0;12]$, $B'(x) = \dfrac{7-x}{x+1}$.

3. 1,25 pts

Dresser le tableau de variations de B sur $[0;12]$. Montrer que le bénéfice maximal vaut $24\ln 2 - 10$ milliers de dirhams. En déduire sa valeur arrondie au dirham.

INDICE

Début : le dénominateur $x+1$ est positif ; le signe de $B'(x)$ est celui de $7-x$. **Point délicat :** écris $8\ln 8$ à l'aide de $\ln 2$.

CORRIGÉ

Signe de $B'(x)$. Le dénominateur $x+1$ est strictement positif : $B'(x)$ a le signe de $7-x$. Ainsi $B'(x) > 0$ sur $[0;7[$, $B'(7) = 0$, et $B'(x) < 0$ sur $]7;12]$.

Variations. B est strictement croissante sur $[0;7]$ et strictement décroissante sur $[7;12]$. Son maximum est atteint en $x = 7$, soit pour 700 sacs.

Valeur exacte.

$$\begin{aligned} B(7) &= 8\ln 8 - 7 - 3 \\ &= 8\ln 8 - 10. \end{aligned}$$

Or $8 = 2^3$, donc $\ln 8 = 3\ln 2$, et

$$B(7) = 24\ln 2 - 10.$$

Valeur arrondie. La calculatrice donne $B(7) \approx 6{,}63553$ milliers de dirhams.

Conclusion. Le bénéfice maximal vaut $24\ln 2 - 10$ milliers de dirhams, soit environ $6\,636$ dirhams, arrondi au dirham.

4. 1 pts

Montrer que $B(1) = \ln 256 - 4$. On rappelle que $4 = \ln\left(\mathrm{e}^4\right)$ et l'on admet que $\mathrm{e}^4 < 55$: en déduire que $B(1) > 0$ et interpréter.

INDICE

Outil : $8\ln 2 = \ln\left(2^8\right)$. **Ensuite :** compare e^4 et 256, puis leurs logarithmes.

CORRIGÉ

Calcul de $B(1)$.

$$\begin{aligned} B(1) &= 8\ln 2 - 1 - 3 \\ &= \ln\left(2^8\right) - 4 \\ &= \ln 256 - 4. \end{aligned}$$

Comparaison. $\mathrm{e}^4 < 55 < 256$. La fonction $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln\left(\mathrm{e}^4\right) < \ln 256$, soit $4 < \ln 256$.

Conclusion. $B(1) = \ln 256 - 4 > 0$: pour 100 sacs vendus par mois, l'atelier réalise déjà un bénéfice.

Exercice 4 3 pts

Un capital placé à intérêts composés

Un épargnant place un capital fictif de $20\,000$ dirhams à intérêts composés, au taux annuel de 4 pour cent : d'une année à la suivante, le capital est multiplié par $1{,}04$. On note C_n le capital, en dirhams, au bout de n années, avec n entier naturel.

1. 0,5 pts

Calculer C_1 et C_2. Montrer que $C_n = 20\,000 \times 1{,}04^n$.

INDICE

Outil : d'une année à la suivante, on multiplie par le même coefficient : reconnais une suite géométrique.

CORRIGÉ

Premières valeurs.

$$\begin{aligned} C_1 &= 20\,000 \times 1{,}04 \\ &= 20\,800, \\ C_2 &= 20\,800 \times 1{,}04 \\ &= 21\,632. \end{aligned}$$

Nature de la suite. D'une année à la suivante, le capital est multiplié par $1{,}04$: pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 1{,}04 \times C_n$. La suite (C_n) est donc géométrique de raison $1{,}04$ et de premier terme $C_0 = 20\,000$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $C_n = 20\,000 \times 1{,}04^n$.

2. 1 pts

Montrer que $C_n \geq 30\,000$ équivaut à $n \geq \dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}04}$. En déduire au bout de combien d'années le capital atteint au moins $30\,000$ dirhams.

INDICE

Début : divise par $20\,000$, puis applique $\ln$. **Point délicat :** le signe de $\ln 1{,}04$ avant de diviser.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel.

Division. $20\,000 > 0$, donc $C_n \geq 30\,000$ équivaut à $1{,}04^n \geq 1{,}5$.

Logarithme. Les deux membres sont strictement positifs et $\ln$ est strictement croissante : cela équivaut à $\ln\left(1{,}04^n\right) \geq \ln 1{,}5$. D'après le logarithme d'une puissance d'exposant entier, $\ln\left(1{,}04^n\right) = n \ln 1{,}04$. L'inéquation s'écrit $n \ln 1{,}04 \geq \ln 1{,}5$.

Division par $\ln 1{,}04$. $1{,}04 > 1$, donc $\ln 1{,}04 > 0$ et le sens est conservé :

$$n \geq \frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}04}.$$

Seuil. La calculatrice donne $\dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}04} \approx 10{,}34$. Le plus petit entier convenable est 11.

Conclusion. Le capital atteint au moins $30\,000$ dirhams au bout de 11 ans.

3. 0,75 pts

À l'aide du logarithme décimal, montrer que $C_n \geq 200\,000$ équivaut à $n \geq \dfrac{1}{\log 1{,}04}$. En déduire au bout de combien d'années le capital est multiplié par 10.

INDICE

Outil : $\log\left(1{,}04^n\right) = n \log 1{,}04$ et $\log 10 = 1$.

CORRIGÉ

Division. $C_n \geq 200\,000$ équivaut à $1{,}04^n \geq 10$.

Logarithme décimal. La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$: cela équivaut à $\log\left(1{,}04^n\right) \geq \log 10$, soit $n \log 1{,}04 \geq 1$, car $\log 10 = 1$.

Signe de $\log 1{,}04$. Comme $1{,}04 > 1$ et que $\log$ est strictement croissante avec $\log 1 = 0$, $\log 1{,}04 > 0$. On divise sans changer le sens :

$$n \geq \frac{1}{\log 1{,}04}.$$

Seuil. La calculatrice donne $\dfrac{1}{\log 1{,}04} \approx 58{,}71$; le plus petit entier convenable est 59.

Conclusion. $C_n \geq 200\,000$ signifie que le capital initial est multiplié par au moins 10 : cela arrive au bout de 59 ans.

4. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^x = 1{,}04$, puis l'inéquation $10^x \geq 1{,}5$. Donner les valeurs approchées utiles à 10^{-4} près.

INDICE

Outil : pour $a > 0$, $10^x = a$ équivaut à $x = \log a$, et $10^x \geq a$ à $x \geq \log a$.

CORRIGÉ

Équation. $1{,}04 > 0$, donc $10^x = 1{,}04$ équivaut à $x = \log 1{,}04$. Ainsi $S = \{\log 1{,}04\}$, avec $\log 1{,}04 \approx 0{,}0170$.

Inéquation. $1{,}5 > 0$ et $\log$ est strictement croissante : $10^x \geq 1{,}5$ équivaut à $x \geq \log 1{,}5$. Ainsi $S = [\log 1{,}5 ; +\infty[$, avec $\log 1{,}5 \approx 0{,}1761$.

Exercice 5 8 pts

Étude complète d'une fonction avec ln

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-3+2\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=x-3$.

1. 1 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}$.

INDICE

Début : cherche d'abord la limite de $\dfrac{x}{x+1}$ quand x tend vers 0^+.

CORRIGÉ

Limite du quotient. Quand x tend vers 0^+, x tend vers 0 et $x+1$ vers 1 : $\dfrac{x}{x+1}$ tend vers 0 en restant strictement positif.

Limite du logarithme. Comme $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln X=-\infty$, $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ tend vers $-\infty$.

Conclusion. $x-3$ tend vers -3, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. L'axe des ordonnées, d'équation $x=0$, est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

2. 1,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-3)\right)=0$. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

INDICE

Début : pour $x>0$, écris $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$. **Outil :** $\ln 1=0$.

CORRIGÉ

Limite du quotient. Pour $x>0$,

$$\frac{x}{x+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}},$$

qui tend vers 1 en $+\infty$.

Limite du logarithme. La fonction $\ln$ est dérivable, donc continue sur $]0;+\infty[$. Par continuité de $\ln$ en 1, $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ tend vers $\ln 1=0$.

Limites de f. Pour $x>0$, $f(x)-(x-3)=2\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, qui tend vers 0. Comme $x-3$ tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend aussi vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-3)\right)=0.$$

La droite $\mathcal{D}$ est donc asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - (x-3) < 0$. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

INDICE

Outil : compare $\dfrac{x}{x+1}$ à 1, puis utilise le signe de $\ln$.

CORRIGÉ

Comparaison à 1. Soit $x > 0$. Alors $0 < x < x+1$; en divisant par $x+1 > 0$, on obtient $0 < \dfrac{x}{x+1} < 1$.

Signe. Le logarithme d'un réel de $]0;1[$ est strictement négatif, donc

$$\begin{aligned} & f(x) - (x-3) \\ & = 2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ & < 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f(x) - (x-3) < 0$: la courbe $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0;+\infty[$.

4. 1,25 pts

On pose $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$ pour $x > 0$. Montrer que $u'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, puis que $f'(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x(x+1)}$. En déduire le sens de variation de f.

INDICE

Outil : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. **Début :** écris $u(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ pour dériver u.

CORRIGÉ

Dérivée de u. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{(x+1)-1}{x+1} \\ &= 1 - \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. De plus, $u(x) > 0$.

Dérivée de f. Pour $x > 0$, $f(x) = x - 3 + 2\ln\left(u(x)\right)$. D'après la dérivée de $\ln u$, égale à $\dfrac{u'}{u}$:

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= 1 + 2 \times \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} \\ &= 1 + \frac{2}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^2+x+2}{x(x+1)}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x > 0$, $x^2 + x + 2 > 0$ et $x(x+1) > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

5. `0,75 pts`

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$. On donne $f(3{,}4) \approx -0{,}116$ et $f(3{,}6) \approx 0{,}110$: en déduire que $3{,}4 < \alpha < 3{,}6$.

INDICE

Outil : une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle y prend une seule fois chaque valeur de son image. **Ensuite :** utilise les limites des questions 1 et 2.

CORRIGÉ

Continuité et monotonie. f est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc continue sur cet intervalle ; elle y est strictement croissante (question 4).

Existence et unicité. Ses limites sont $-\infty$ en 0^+ (question 1) et $+\infty$ en $+\infty$ (question 2). Continue et strictement croissante, f prend chaque valeur réelle exactement une fois sur $]0;+\infty[$, en particulier la valeur 0.

Encadrement. $f(3{,}4) < 0 < f(3{,}6)$, c'est-à-dire $f(3{,}4) < f(\alpha) < f(3{,}6)$. Comme f est strictement croissante, l'ordre des images est celui des antécédents.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$, et $3{,}4 < \alpha < 3{,}6$.

6. 1,25 pts

Montrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2x - 4 - 2\ln 2$. Tracer $\mathcal{D}$, T et $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. **Point délicat :** $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

CORRIGÉ

Valeurs en 1**.** Comme $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 3 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -2 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

D'après la question 4, $f'(1) = \dfrac{1+1+2}{1\times 2} = 2$.

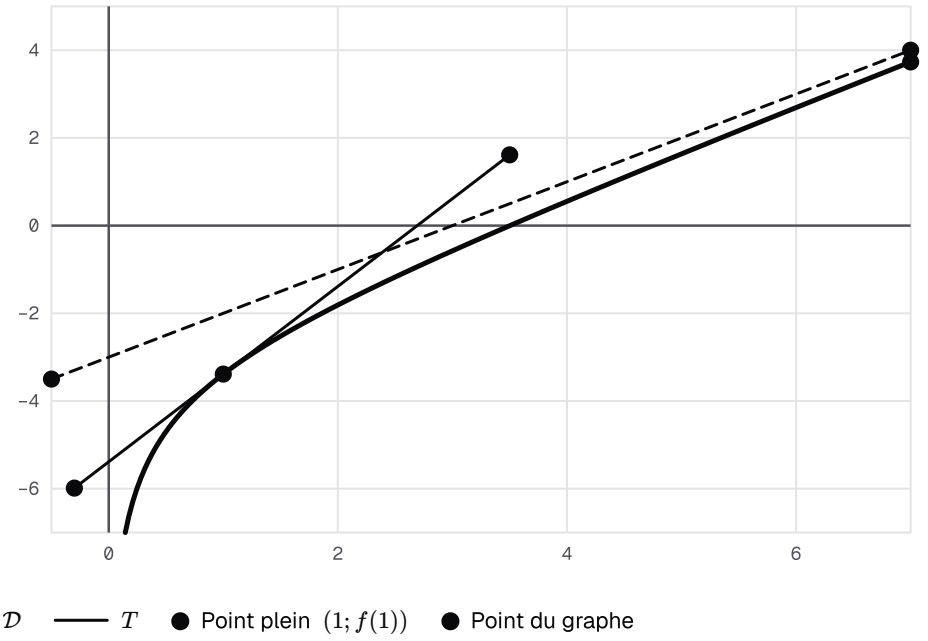
Équation de T**.** T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$:

$$\begin{aligned} y &= 2(x-1) - 2 - 2\ln 2 \\ &= 2x - 4 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

Conclusion. La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2x - 4 - 2\ln 2$.

Tracé. On trace $\mathcal{D}$, qui passe par $(0;-3)$ et $(3;0)$, puis T, de coefficient directeur 2, qui passe par le point $(1;f(1))$, avec $f(1) \approx -3{,}39$.

La courbe $\mathcal{C}$ part de $-\infty$ le long de l'axe des ordonnées. Elle monte en touchant T en ce point et coupe l'axe des abscisses en α. Elle reste au-dessous de $\mathcal{D}$ et s'en rapproche en $+\infty$.



Le tracé demandé : la courbe C, sa tangente T au point d'abscisse 1 et l'asymptote oblique D.

7. 1,5 pts

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$. Montrer que g est de la forme $\dfrac{u'}{u}$. En déduire la primitive G de g sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1, et montrer que $G(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+x}{2}\right)$.

INDICE

Début : dérive $u(x)=x^2+x$ et vérifie son signe sur $]0;+\infty[$. **Point délicat :** la constante est fixée par $G(1)=0$.

CORRIGÉ

Forme $\dfrac{u'}{u}$. Posons $u(x)=x^2+x=x(x+1)$. Pour $x>0$, $u(x)>0$, et $u'(x)=2x+1$. Donc $g=\dfrac{u'}{u}$ sur $]0;+\infty[$.

Primitives. D'après les primitives de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u>0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, les primitives de g sur cet intervalle sont les fonctions $x\mapsto \ln\left(x^2+x\right)+c$, avec c réel.

Constante. $G(1)=\ln(1+1)+c=\ln 2+c$. La condition $G(1)=0$ donne $c=-\ln 2$.

Expression de G. Pour tout $x>0$, le logarithme d'un quotient donne

$$\begin{aligned} G(x) &= \ln\left(x^2+x\right)-\ln 2 \\ &= \ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. La primitive de g sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 est G, avec $G(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+x}{2}\right)$.