BURHAN

# Fonctions logarithmiques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
|---|---|---|
| Fonctions logarithmiques | Entraînement | 7 |

## Exercice 1

### Domaine et signe d'un logarithme de quotient

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{5-x}\right)$.

**1.**

Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$.

INDICE

**Outil :** un tableau de signes du quotient $\dfrac{x-1}{5-x}$. **Point délicat :** la valeur interdite $5$.

**2.**

Résoudre $f(x) = 0$, puis étudier le signe de $f(x)$ sur $D$.

INDICE

**Outil :** $\ln A > 0$ équivaut à $A > 1$. **Début :** sur $D$, le dénominateur $5 - x$ est strictement positif ; multiplie sans changer le sens.

**3.**

Déterminer le domaine de définition de la fonction $g$ définie par $g(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

INDICE

**Début :** cherche les racines du trinôme. **Ensuite :** un trinôme a le signe de son coefficient dominant à l'extérieur des racines.

### Exercice 2

## Équations et inéquation qui cachent un second degré

**1.**

Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$.

INDICE

**Début :** pose $X = \ln x$ ; tu obtiens une équation du second degré en $X$.

**2.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x-4) = \ln 5$.

INDICE

**Début :** le domaine d'abord. **Point délicat :** une racine du second degré peut sortir du domaine.

**3.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\ln(x-1) \leq \ln(x+5)$.

INDICE

**Outil :** sur le domaine, $2\ln(x-1) = \ln\left((x-1)^2\right)$. **Ensuite :** compare les contenus, puis étudie le signe d'un trinôme.

### Exercice 3

## Deux systèmes logarithmiques

**1.**

Résoudre dans $]0;+\infty[ \times ]0;+\infty[$ le système formé des équations $\ln x + \ln y = 3$ et $3\ln x - 2\ln y = 4$.

INDICE

**Outil :** pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. **Ensuite :** substitution à partir de la première équation.

**2.**

On considère le système formé des équations $x + y = 10$ et $\ln x + \ln y = \ln 21$. Montrer que, pour $x > 0$ et $y > 0$, la seconde équation équivaut à $xy = 21$.

INDICE

**Outil :** le logarithme d'un produit.

**3.**

En déduire les solutions du système.

INDICE

**Début :** remplace $y$ par $10 - x$ dans $xy = 21$. **Point délicat :** vérifie que $x$ et $y$ sont strictement positifs.

### Exercice 4

## Lever des formes indéterminées

**1.**

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 4\ln x + 1)$.

INDICE

**Début :** $x$ et $4\ln x$ tendent tous deux vers $+\infty$ : c'est une forme indéterminée ; factorise par $x$.

**2.**

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$.

INDICE

**Début :** réduis au même dénominateur $x$. **Outil :** la limite de $x \ln x$ en $0^+$.

**3.**

Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 4x + 3}$.

INDICE

**Début :** le réel $1$ annule $x^2 - 4x + 3$ ; factorise ce trinôme. **Outil :** la limite de $\dfrac{\ln x}{x - 1}$ en $1$.

**Exercice 5**

## Variations d'une fonction avec le logarithme d'un trinôme

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 4x - 10\ln\left(x^2+4\right)$.

**1.**

Justifier que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

INDICE

**Outil :** un carré est positif ou nul. **Ensuite :** cherche la limite de chaque terme en $-\infty$ ; il n'y a pas d'indétermination.

**2.**

Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous la forme d'un seul quotient. Factoriser son numérateur.

INDICE

**Outil :** avec $u(x) = x^2+4$, la dérivée de $\ln u$ est $\dfrac{u'}{u}$, et ici $u'(x) = 2x$. **Point délicat :** le numérateur est un trinôme ; cherche ses racines.

**3.**

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$, avec ses limites. Donner les valeurs exactes de $f(1)$ et de $f(4)$.

INDICE

**Début :** le dénominateur $x^2+4$ est strictement positif ; étudie le signe de $(x-1)(x-4)$.

### Exercice 6

## Primitives et coût total

**1.**

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{6x-3}{x^2-x+1}$.

INDICE

**Début :** dérive $x^2-x+1$ et compare au numérateur.

**2.**

Vérifier que, pour $x > -2$, $\dfrac{2x+1}{x+2} = 2 - \dfrac{3}{x+2}$. En déduire une primitive sur $]-2;+\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$.

INDICE

**Début :** réduis $2 - \dfrac{3}{x+2}$ au même dénominateur. **Ensuite :** cherche une primitive de chaque terme.

**3.**

Une entreprise fictive fabrique $x$ centaines d'objets, avec $x \geq 0$. Son coût total $C(x)$, en milliers de dirhams, vérifie $C'(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ et $C(0) = 5$. Déterminer $C(x)$.

INDICE

**Outil :** deux primitives diffèrent d'une constante. **Point délicat :** $\ln 2$ apparaît en $x = 0$.

### Exercice 7

## Quand un prix monte ou descend

Les prix de cet exercice sont fictifs.

**1.**

Le prix d'un article augmente de $3$ pour cent par an. Son prix initial est $P_0$. Au bout de combien d'années complètes dépasse-t-il pour la première fois une fois et demie son prix initial ?

INDICE

**Début :** le prix est multiplié par $1{,}03$ par an ; écris l'inéquation $1{,}03^n \geq 1{,}5$. **Outil :** applique $\ln$ aux deux membres.

**2.**

Le prix d'un autre article baisse de $6$ pour cent par an. Au bout de combien d'années complètes vaut-il au plus $70$ pour cent de son prix initial ?

INDICE

**Début :** écris l'inéquation $0{,}94^n \leq 0{,}7$. **Point délicat :** le signe de $\ln 0{,}94$.

**3.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^{2x-1} = 50$. Donner une valeur approchée de la solution à $10^{-3}$ près.

INDICE

**Outil :** pour $a > 0$, $10^X = a$ équivaut à $X = \log a$, ici avec $X = 2x - 1$.