BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Entraînement	7

Exercice 1

Domaine et signe d'un logarithme de quotient

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{5-x}\right)$.

1.

Déterminer le domaine de définition D de f.

INDICE

Outil : un tableau de signes du quotient $\dfrac{x-1}{5-x}$. **Point délicat :** la valeur interdite 5.

CORRIGÉ

Condition. $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 5$ et $\dfrac{x-1}{5-x} > 0$.

Signe du quotient. $x-1$ s'annule en 1 et $5-x$ s'annule en 5 :

- pour $x < 1$: $x-1 < 0$ et $5-x > 0$, le quotient est strictement négatif ;
- pour $1 < x < 5$: $x-1 > 0$ et $5-x > 0$, le quotient est strictement positif ;
- pour $x > 5$: $x-1 > 0$ et $5-x < 0$, le quotient est strictement négatif.

Le quotient est nul en 1.

Conclusion. $D =]1;5[$.

2.

Résoudre $f(x) = 0$, puis étudier le signe de $f(x)$ sur D.

INDICE

Outil : $\ln A > 0$ équivaut à $A > 1$. **Début :** sur D, le dénominateur $5-x$ est strictement positif ; multiplie sans changer le sens.

CORRIGÉ

Soit $x \in D$. Alors $5-x > 0$; on compare le quotient à 1.

Signe positif. $f(x) > 0$ équivaut à $\dfrac{x-1}{5-x} > 1$. En multipliant par $5-x > 0$, le sens est conservé : cela équivaut à $x-1 > 5-x$, soit $2x > 6$, c'est-à-dire $x > 3$.

Annulation. De même, $f(x) = 0$ équivaut à $\dfrac{x-1}{5-x} = 1$, soit $x-1 = 5-x$, c'est-à-dire $x = 3$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution 3. De plus, $f(x) < 0$ sur $]1;3[$, $f(3) = 0$, et $f(x) > 0$ sur $]3;5[$.

3.

Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

INDICE

Début : cherche les racines du trinôme. **Ensuite :** un trinôme a le signe de son coefficient dominant à l'extérieur des racines.

CORRIGÉ

Racines. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$: le trinôme s'annule en 2 et en 3.

Signe. Son coefficient dominant vaut $1 > 0$: le trinôme est strictement positif à l'extérieur des racines, c'est-à-dire pour $x < 2$ ou $x > 3$.

Conclusion. $g(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 5x + 6 > 0$:

$$D_g =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[.$$

Exercice 2

Équations et inéquation qui cachent un second degré

1.

Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$.

INDICE

Début : pose $X = \ln x$; tu obtiens une équation du second degré en X.

CORRIGÉ

Changement d'inconnue. Soit $x > 0$. On pose $X = \ln x$; l'équation devient

$$X^2 - X - 6 = 0.$$

Second degré. $\Delta = 1 + 24 = 25$, d'où les racines $X = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $X = \dfrac{1+5}{2} = 3$.

Retour à x. $\ln x = 3$ équivaut à $x = \mathrm{e}^3$, et $\ln x = -2$ équivaut à $x = \mathrm{e}^{-2}$. Ces deux réels sont strictement positifs.

Conclusion. $S = \left\{\mathrm{e}^{-2}; \mathrm{e}^3\right\}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x-4) = \ln 5$.

INDICE

Début : le domaine d'abord. **Point délicat :** une racine du second degré peut sortir du domaine.

CORRIGÉ

Domaine. Il faut $x > 0$ et $x - 4 > 0$, soit $x > 4$: $D =]4;+\infty[$.

Équation. Sur D, le logarithme d'un produit donne $\ln x + \ln(x-4) = \ln\left(x(x-4)\right)$. L'équation équivaut à $x(x-4) = 5$, soit

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Racines. $\Delta = 16 + 20 = 36$, d'où $x = \dfrac{4-6}{2} = -1$ et $x = \dfrac{4+6}{2} = 5$.

Conclusion. -1 n'appartient pas à D et 5 appartient à D : $S = \{5\}$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\ln(x-1) \leq \ln(x+5)$.

INDICE

Outil : sur le domaine, $2\ln(x-1) = \ln\left((x-1)^2\right)$. **Ensuite :** compare les contenus, puis étudie le signe d'un trinôme.

CORRIGÉ

Domaine. Il faut $x-1>0$ et $x+5>0$, soit $x>1$: $D=]1;+\infty[$.

Transformation. Soit $x \in D$. Comme $x-1>0$, le logarithme d'une puissance donne $2\ln(x-1) = \ln\left((x-1)^2\right)$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, l'inéquation équivaut à $(x-1)^2 \leq x+5$.

Développement.

$$\begin{aligned}&(x-1)^2-(x+5)\\&=x^2-2x+1-x-5\\&=x^2-3x-4.\end{aligned}$$

L'inéquation s'écrit donc $x^2-3x-4 \leq 0$.

Signe du trinôme. $\Delta = 9+16 = 25$: les racines sont -1 et 4. Le trinôme est négatif ou nul entre ses racines, soit sur $[-1;4]$.

Conclusion. On garde les réels de D : $S=]1;4]$.

Exercice 3

Deux systèmes logarithmiques

1.

Résoudre dans $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ le système formé des équations $\ln x+\ln y=3$ et $3\ln x-2\ln y=4$.

INDICE

Outil : pose $X=\ln x$ et $Y=\ln y$. **Ensuite :** substitution à partir de la première équation.

CORRIGÉ

Système linéaire. Avec $X=\ln x$ et $Y=\ln y$, le système devient

$$\begin{cases} X+Y=3 \\ 3X-2Y=4 \end{cases}$$

Substitution. La première équation donne $Y=3-X$. Dans la seconde : $3X-2(3-X)=4$, soit $5X-6=4$, donc $5X=10$ et $X=2$. Puis $Y=3-2=1$.

Retour. $\ln x=2$ donne $x=\mathrm{e}^2$, et $\ln y=1$ donne $y=\mathrm{e}$; ces deux réels sont strictement positifs.

Conclusion. Le système a pour unique solution le couple $\left(\mathrm{e}^2;\mathrm{e}\right)$.

2.

On considère le système formé des équations $x+y=10$ et $\ln x+\ln y=\ln 21$. Montrer que, pour $x>0$ et $y>0$, la seconde équation équivaut à $xy=21$.

INDICE

Outil : le logarithme d'un produit.

CORRIGÉ

Produit. Soit $x>0$ et $y>0$. Le logarithme d'un produit donne $\ln x+\ln y=\ln(xy)$: l'équation s'écrit $\ln(xy)=\ln 21$.

Équivalence. $xy>0$ et $21>0$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, $\ln(xy)=\ln 21$ équivaut à $xy=21$.

Conclusion. Pour $x>0$ et $y>0$, la seconde équation équivaut à $xy=21$.

3.

En déduire les solutions du système.

INDICE

Début : remplace y par $10-x$ dans $xy=21$. **Point délicat :** vérifie que x et y sont strictement positifs.

CORRIGÉ

Substitution. La première équation donne $y=10-x$. Avec la question 2, on obtient $x(10-x)=21$, soit

$$x^2-10x+21=0.$$

Racines. $\Delta=100-84=16$, d'où $x=\dfrac{10-4}{2}=3$ et $x=\dfrac{10+4}{2}=7$.

Couples. Si $x=3$, alors $y=7$; si $x=7$, alors $y=3$. Dans les deux cas, $x>0$ et $y>0$: les deux couples conviennent.

Conclusion. Les solutions du système sont $(3;7)$ et $(7;3)$.

Exercice 4

Lever des formes indéterminées

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 4\ln x + 1)$.

INDICE

Début : x et $4\ln x$ tendent tous deux vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée ; factorise par x.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. x et $4\ln x$ tendent vers $+\infty$: leur différence est indéterminée. On factorise par x ; pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} & x - 4\ln x + 1 \\ & = x\left(1 - 4 \times \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Limite de la parenthèse. D'après les croissances comparées, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, et $\dfrac{1}{x}$ aussi : la parenthèse tend vers 1.

Conclusion. Le produit tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 4\ln x + 1) = +\infty$.

2.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$.

INDICE

Début : réduis au même dénominateur x. **Outil :** la limite de $x\ln x$ en 0^+.

CORRIGÉ

Même dénominateur. Pour $x > 0$:

$$\frac{1}{x} + \ln x = \frac{1 + x\ln x}{x}.$$

Numérateur. D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$: le numérateur tend vers 1.

Dénominateur. x tend vers 0 en restant strictement positif.

Conclusion. Le quotient tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right) = +\infty$.

3.

Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 4x + 3}$.

INDICE

Début : le réel 1 annule $x^2 - 4x + 3$; factorise ce trinôme. **Outil :** la limite de $\dfrac{\ln x}{x - 1}$ en 1.

CORRIGÉ

Factorisation. 1 annule le trinôme, et $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Écriture. Pour $x > 0$ avec $x \neq 1$ et $x \neq 3$:

$$\frac{\ln x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{\ln x}{x - 1} \times \frac{1}{x - 3}.$$

Limite de chaque facteur. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$, et $\dfrac{1}{x - 3}$ tend vers $\dfrac{1}{1 - 3} = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. La limite vaut $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 5

Variations d'une fonction avec le logarithme d'un trinôme

On considère la fonction f définie par $f(x) = 4x - 10\ln\left(x^2+4\right)$.

1.

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : un carré est positif ou nul. **Ensuite :** cherche la limite de chaque terme en $-\infty$; il n'y a pas d'indétermination.

CORRIGÉ

Domaine. Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $x^2+4 \geq 4 > 0$: $\ln\left(x^2+4\right)$ existe, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Limite de chaque terme. Quand x tend vers $-\infty$, $4x$ tend vers $-\infty$. De plus x^2+4 tend vers $+\infty$, donc $\ln\left(x^2+4\right)$ aussi, et $-10\ln\left(x^2+4\right)$ tend vers $-\infty$.

Conclusion. Les deux termes tendent vers $-\infty$, sans indétermination :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

2.

Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous la forme d'un seul quotient. Factoriser son numérateur.

INDICE

Outil : avec $u(x) = x^2+4$, la dérivée de $\ln u$ est $\dfrac{u'}{u}$, et ici $u'(x) = 2x$. **Point délicat :** le numérateur est un trinôme ; cherche ses racines.

CORRIGÉ

Dérivée. Posons $u(x) = x^2+4$: $u(x) > 0$ et $u'(x) = 2x$. D'après la dérivée de $\ln u$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 - 10 \times \frac{2x}{x^2+4} \\ &= \frac{4\left(x^2+4\right) - 20x}{x^2+4} \\ &= \frac{4x^2 - 20x + 16}{x^2+4}. \end{aligned}$$

Factorisation du numérateur. $4x^2 - 20x + 16 = 4\left(x^2 - 5x + 4\right)$. Le trinôme x^2-5x+4 a pour racines 1 et 4, car $1 - 5 + 4 = 0$ et $16 - 20 + 4 = 0$. Donc $4x^2 - 20x + 16 = 4(x-1)(x-4)$.

Conclusion. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{4(x-1)(x-4)}{x^2+4}.$$

3.

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, avec ses limites. Donner les valeurs exactes de $f(1)$ et de $f(4)$.

INDICE

Début : le dénominateur x^2+4 est strictement positif ; étudie le signe de $(x-1)(x-4)$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Le dénominateur x^2+4 est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $(x-1)(x-4)$, trinôme de coefficient dominant positif. Donc $f'(x)>0$ sur $]-\infty;1[$ et sur $]4;+\infty[$, $f'(x)<0$ sur $]1;4[$, et f' s'annule en 1 et en 4.

Variations. f est strictement croissante sur $]-\infty;1]$, strictement décroissante sur $[1;4]$, puis strictement croissante sur $[4;+\infty[$. Le tableau porte $-\infty$ à gauche (question 1) et $+\infty$ à droite (limite admise).

Valeurs exactes. Avec $1^2+4=5$ et $4^2+4=20$:

$$f(1) = 4 - 10\ln 5,$$
$$f(4) = 16 - 10\ln 20.$$

Valeurs approchées. À la calculatrice, $f(1)$ vaut environ $-12{,}094$ et $f(4)$ environ $-13{,}957$.

Exercice 6

Primitives et coût total

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{6x-3}{x^2-x+1}$.

INDICE

Début : dérive x^2-x+1 et compare au numérateur.

CORRIGÉ

Dénominateur. Posons $u(x) = x^2 - x + 1$. Pour tout réel x :

$$u(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

et $u'(x) = 2x - 1$.

Forme. $6x - 3 = 3(2x-1)$, donc la fonction s'écrit $x \mapsto 3 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 3\ln\left(x^2-x+1\right)$.

2.

Vérifier que, pour $x > -2$, $\dfrac{2x+1}{x+2} = 2 - \dfrac{3}{x+2}$. En déduire une primitive sur $]-2;+\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$.

INDICE

Début : réduis $2 - \dfrac{3}{x+2}$ au même dénominateur. **Ensuite :** cherche une primitive de chaque terme.

CORRIGÉ

Vérification. Pour $x > -2$:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{3}{x+2} &= \frac{2(x+2) - 3}{x+2} \\ &= \frac{2x+1}{x+2}. \end{aligned}$$

Primitive de chaque terme. Sur $]-2;+\infty[$, $x+2 > 0$:

- $x \mapsto 2x$ est une primitive de $x \mapsto 2$;
- $x \mapsto 3\ln(x+2)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{x+2}$.

Conclusion. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$ sur $]-2;+\infty[$ est $x \mapsto 2x - 3\ln(x+2)$.

3.

Une entreprise fictive fabrique x centaines d'objets, avec $x \geq 0$. Son coût total $C(x)$, en milliers de dirhams, vérifie $C'(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ et $C(0) = 5$. Déterminer $C(x)$.

INDICE

Outil : deux primitives diffèrent d'une constante. **Point délicat :** $\ln 2$ apparaît en $x = 0$.

CORRIGÉ

Forme. C est une primitive de C' sur $[0;+\infty[$, et deux primitives diffèrent d'une constante. D'après la question 2, il existe un réel c tel que, pour tout $x \geq 0$,

$$C(x) = 2x - 3\ln(x+2) + c.$$

Constante. $C(0) = 0 - 3\ln 2 + c = -3\ln 2 + c$. La condition $C(0) = 5$ donne $c = 5 + 3\ln 2$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$,

$$C(x) = 2x - 3\ln(x+2) + 5 + 3\ln 2.$$

Exercice 7

Quand un prix monte ou descend

Les prix de cet exercice sont fictifs.

1.

Le prix d'un article augmente de 3 pour cent par an. Son prix initial est P_0. Au bout de combien d'années complètes dépasse-t-il pour la première fois une fois et demie son prix initial ?

INDICE

Début : le prix est multiplié par $1{,}03$ par an ; écris l'inéquation $1{,}03^n \geq 1{,}5$. **Outil :** applique $\ln$ aux deux membres.

CORRIGÉ

Modélisation. Augmenter de 3 pour cent revient à multiplier par $1{,}03$. Après n années, le prix vaut $P_0 \times 1{,}03^n$. On cherche le plus petit entier n tel que $P_0 \times 1{,}03^n \geq 1{,}5 \times P_0$, soit, comme $P_0 > 0$, $1{,}03^n \geq 1{,}5$.

Logarithme. La fonction $\ln$ est strictement croissante : l'inéquation équivaut à $\ln\left(1{,}03^n\right) \geq \ln 1{,}5$, soit $n \ln 1{,}03 \geq \ln 1{,}5$.

Division. $1{,}03 > 1$, donc $\ln 1{,}03 > 0$ et le sens est conservé :

$$n \geq \frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}03} \approx 13{,}72.$$

Conclusion. Le plus petit entier convenable est 14 : le prix atteint une fois et demie son prix initial au bout de 14 ans.

2.

Le prix d'un autre article baisse de 6 pour cent par an. Au bout de combien d'années complètes vaut-il au plus 70 pour cent de son prix initial ?

INDICE

Début : écris l'inéquation $0{,}94^n \leq 0{,}7$. **Point délicat :** le signe de $\ln 0{,}94$.

CORRIGÉ

Modélisation. Baisser de 6 pour cent revient à multiplier par $0{,}94$. On cherche le plus petit entier n tel que $0{,}94^n \leq 0{,}7$.

Logarithme. La fonction $\ln$ est strictement croissante : l'inéquation équivaut à $n \ln 0{,}94 \leq \ln 0{,}7$.

Division. $0 < 0{,}94 < 1$, donc $\ln 0{,}94 < 0$: diviser par ce nombre change le sens.

$$n \geq \frac{\ln 0{,}7}{\ln 0{,}94} \approx 5{,}76.$$

Conclusion. Le plus petit entier convenable est 6 : le prix vaut au plus 70 pour cent de son prix initial au bout de 6 ans.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^{2x-1} = 50$. Donner une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.

INDICE

Outil : pour $a > 0$, $10^{X} = a$ équivaut à $X = \log a$, ici avec $X = 2x - 1$.

CORRIGÉ

Équivalence. Comme $50 > 0$, l'équation $10^{2x-1} = 50$ équivaut à $2x - 1 = \log 50$.

Solution. $2x = 1 + \log 50$, donc

$$x = \frac{1 + \log 50}{2} \approx 1{,}349.$$

Conclusion. $S = \left\{ \dfrac{1 + \log 50}{2} \right\}$, et la solution vaut environ $1{,}349$.