BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Application	8

Exercice 1

Où ces expressions ont-elles un sens ?

1.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(12 - 4x)$. Déterminer son domaine de définition.

INDICE

Outil : $\ln A$ existe seulement si $A > 0$. **Point délicat :** tu divises par un nombre négatif.

2.

Même question pour la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + 2) - \ln(7 - x)$.

INDICE

Début : écris deux conditions, une pour chaque logarithme, puis garde les réels qui vérifient les deux.

3.

Même question pour la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{3}{\ln x}$.

INDICE

Outil : un dénominateur ne doit pas s'annuler. **Ensuite :** cherche le réel dont le logarithme vaut 0.

Exercice 2

Signe et ordre de quelques logarithmes

1.

Sans calculatrice, donner le signe de $\ln 0{,}35$, de $\ln 1{,}8$ et de $\ln\left(\dfrac{7}{8}\right)$.

INDICE

Outil : compare chaque réel à 1.

2.

Comparer $\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{6}{7}$. En déduire l'ordre de $\ln\left(\dfrac{5}{6}\right)$ et $\ln\left(\dfrac{6}{7}\right)$.

INDICE

Début : calcule la différence des deux fractions au dénominateur 42.

3.

Pour $x > \dfrac{3}{2}$, étudier le signe de $\ln(2x-3)$.

INDICE

Outil : $\ln A < 0$ lorsque $0 < A < 1$. **Point délicat :** traduis $0 < 2x-3 < 1$ en condition sur x.

Exercice 3

Regrouper et décomposer des logarithmes

1.

Écrire $A = 2\ln 3 + \ln 5 - \ln 15$ sous la forme $\ln a$, avec a entier.

INDICE

Outil : $2\ln 3 = \ln 9$, puis la somme et la différence deviennent un produit et un quotient.

2.

Exprimer $\ln 48$, $\ln\left(\dfrac{4}{27}\right)$ et $\ln\sqrt{12}$ à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$.

INDICE

Début : décompose 48, 4, 27 et 12 en produits de 2 et de 3.

3.

Calculer $B = \ln\left(\sqrt{5}-1\right) + \ln\left(\sqrt{5}+1\right)$ et l'exprimer à l'aide de $\ln 2$.

INDICE

Début : les deux nombres sont strictement positifs ; regroupe en un seul logarithme. **Ensuite :** pense à $(a-b)(a+b)$.

Exercice 4

Deux équations et une inéquation

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x+1) = \ln(x+6)$.

INDICE

Début : cherche d'abord les réels pour lesquels les deux logarithmes existent.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x-2) = 3$.

INDICE

Outil : écris 3 comme le logarithme d'un réel strictement positif.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(3-x) < \ln 2$.

INDICE

Outil : la fonction $\ln$ garde l'ordre. **Point délicat :** n'oublie pas la condition d'existence.

Exercice 5

Premières limites avec ln

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + 5\ln x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)$.

INDICE

Outil : les limites de $\ln$ en $+\infty$ et en 0^+, puis les règles sur les sommes.

2.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x - 4}{x}$.

INDICE

Début : coupe la fraction en deux : $\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{4}{x}$.

3.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+6x)}{4x}$.

INDICE

Outil : pose $h = 6x$ pour retrouver $\dfrac{\ln(1+h)}{h}$. **Point délicat :** le coefficient devant.

Exercice 6

Dériver des fonctions avec ln u

1.

Justifier que $x^2 - 4x + 7 > 0$ pour tout réel x. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 - 4x + 7\right)$.

INDICE

Début : écris $x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$. **Outil :** $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

2.

En déduire le sens de variation de f et son minimum.

INDICE

Outil : le dénominateur est strictement positif ; le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 4$.

3.

Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $\left]-\dfrac{1}{4}; +\infty\right[$ par $g(x) = 3x - \ln(4x+1)$. Écrire $g'(x)$ sous la forme d'un seul quotient.

INDICE

Point délicat : la dérivée de $4x + 1$ vaut 4, pas 1.

Exercice 7

Reconnaître la forme u'/u

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$.

INDICE

Outil : dérive le dénominateur et compare au numérateur. **Point délicat :** vérifie que le dénominateur ne s'annule pas.

2.

Un atelier fictif fabrique x centaines d'objets, avec $x \geq 0$. Son coût marginal, dérivée de son coût total, vaut $c(x) = \dfrac{5}{x+4}$ milliers de dirhams. Déterminer une primitive de c sur $[0;+\infty[$.

INDICE

Début : avec $u(x) = x+4$, on a $u'(x) = 1$; sors le facteur 5.

3.

Déterminer une primitive sur $]-\infty;-2[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{3x+6}$.

INDICE

Début : la dérivée de $3x+6$ vaut 3 : fais apparaître $\dfrac{3}{3x+6}$. **Point délicat :** le signe de $3x+6$ sur l'intervalle.

Exercice 8

Logarithme de base a et puissances de 10

1.

Calculer $\log_2 64$, $\log 0{,}0001$ et $\log_5 \sqrt{5}$.

INDICE

Outil : repère quelle puissance de a donne le nombre proposé ; sers-toi ensuite de $\log_a a = 1$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^x = 70$. Donner une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.

INDICE

Outil : pour $a > 0$, $10^x = a$ équivaut à $x = \log a$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $10^x \geq 0{,}5$.

INDICE

Outil : même équivalence, avec le sens de l'inégalité conservé.