BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Application	8

Exercice 1

Où ces expressions ont-elles un sens ?

1.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(12 - 4x)$. Déterminer son domaine de définition.

INDICE

Outil : $\ln A$ existe seulement si $A > 0$. **Point délicat :** tu divises par un nombre négatif.

CORRIGÉ

Condition d'existence. $f(x)$ existe si et seulement si $12 - 4x > 0$, soit $-4x > -12$.

Résolution. On divise les deux membres par -4, qui est négatif : le sens de l'inégalité change, et l'on obtient $x < 3$.

Conclusion. Le domaine de définition de f est

$$D_f =]-\infty; 3[\,.$$

2.

Même question pour la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + 2) - \ln(7 - x)$.

INDICE

Début : écris deux conditions, une pour chaque logarithme, puis garde les réels qui vérifient les deux.

CORRIGÉ

Conditions. Les deux logarithmes doivent exister :

- $x + 2 > 0$, soit $x > -2$;
- $7 - x > 0$, soit $x < 7$.

Conclusion. Les réels qui vérifient les deux conditions forment le domaine

$$D_g =]-2; 7[\,.$$

3.

Même question pour la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{3}{\ln x}$.

INDICE

Outil : un dénominateur ne doit pas s'annuler. **Ensuite :** cherche le réel dont le logarithme vaut 0.

CORRIGÉ

Existence de $\ln x$. $\ln x$ existe si et seulement si $x > 0$.

Dénominateur. Il faut aussi $\ln x \neq 0$. Or $\ln 1 = 0$ et $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$.

Conclusion. On retire 1 de $]0; +\infty[$:

$$D_h =]0; 1[\cup]1; +\infty[\,.$$

Exercice 2

Signe et ordre de quelques logarithmes

1.

Sans calculatrice, donner le signe de $\ln 0{,}35$, de $\ln 1{,}8$ et de $\ln\left(\frac{7}{8}\right)$.

INDICE

Outil : compare chaque réel à 1.

CORRIGÉ

On compare chaque réel à 1 : le logarithme d'un réel de $]0;1[$ est strictement négatif, celui d'un réel strictement supérieur à 1 est strictement positif.

- $0 < 0{,}35 < 1$, donc $\ln 0{,}35 < 0$;
- $1{,}8 > 1$, donc $\ln 1{,}8 > 0$;
- $0 < \frac{7}{8} < 1$, donc $\ln\left(\frac{7}{8}\right) < 0$.

2.

Comparer $\frac{5}{6}$ et $\frac{6}{7}$. En déduire l'ordre de $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ et $\ln\left(\frac{6}{7}\right)$.

INDICE

Début : calcule la différence des deux fractions au dénominateur 42.

CORRIGÉ

Comparaison des fractions. On réduit au dénominateur commun 42 :

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} - \frac{6}{7} &= \frac{35-36}{42} \\ &= -\frac{1}{42}.\end{aligned}$$

Cette différence est strictement négative, donc $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$.

Logarithmes. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$: elle conserve l'ordre.

Conclusion. $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln\left(\frac{6}{7}\right)$.

3.

Pour $x > \dfrac{3}{2}$, étudier le signe de $\ln(2x-3)$.

INDICE

Outil : $\ln A < 0$ lorsque $0 < A < 1$. **Point délicat :** traduis $0 < 2x-3 < 1$ en condition sur x.

CORRIGÉ

Soit $x > \dfrac{3}{2}$. Alors $2x-3 > 0$ et $\ln(2x-3)$ existe. On compare $2x-3$ à 1.

Signe négatif. $\ln(2x-3) < 0$ équivaut à $0 < 2x-3 < 1$, soit $3 < 2x < 4$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{2} < x < 2$.

Annulation. $\ln(2x-3) = 0$ équivaut à $2x-3 = 1$, soit $x = 2$.

Signe positif. $\ln(2x-3) > 0$ équivaut à $2x-3 > 1$, soit $x > 2$.

Conclusion. $\ln(2x-3)$ est strictement négatif sur $\left]\dfrac{3}{2}\,;2\right[$, nul en 2 et strictement positif sur $]2;+\infty[$.

Exercice 3

Regrouper et décomposer des logarithmes

1.

Écrire $A = 2\ln 3 + \ln 5 - \ln 15$ sous la forme $\ln a$, avec a entier.

INDICE

Outil : $2\ln 3 = \ln 9$, puis la somme et la différence deviennent un produit et un quotient.

CORRIGÉ

Puissance. $2\ln 3 = \ln\left(3^2\right) = \ln 9$.

Regroupement. La somme devient un produit et la différence un quotient :

$$\begin{aligned} A &= \ln 9 + \ln 5 - \ln 15 \\ &= \ln\left(\frac{9 \times 5}{15}\right) \\ &= \ln 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $A = \ln 3$, donc $a = 3$.

2.

Exprimer $\ln 48$, $\ln\left(\dfrac{4}{27}\right)$ et $\ln\sqrt{12}$ à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$.

INDICE

Début : décompose 48, 4, 27 et 12 en produits de 2 et de 3.

CORRIGÉ

Chaque nombre se décompose en puissances de 2 et de 3 ; on conclut avec le logarithme d'un produit, d'un quotient et d'une puissance.

Pour $\ln 48$. $48 = 2^4 \times 3$, donc $\ln 48 = 4\ln 2 + \ln 3$.

Pour $\ln\left(\dfrac{4}{27}\right)$. $\dfrac{4}{27} = \dfrac{2^2}{3^3}$, donc

$$\ln\left(\frac{4}{27}\right) = 2\ln 2 - 3\ln 3.$$

Pour $\ln\sqrt{12}$. $12 = 2^2 \times 3$ et $\ln\sqrt{12} = \dfrac{1}{2}\ln 12$, donc

$$\begin{aligned} \ln\sqrt{12} &= \frac{1}{2}\left(2\ln 2 + \ln 3\right) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3. \end{aligned}$$

3.

Calculer $B = \ln\left(\sqrt{5}-1\right) + \ln\left(\sqrt{5}+1\right)$ et l'exprimer à l'aide de $\ln 2$.

INDICE

Début : les deux nombres sont strictement positifs ; regroupe en un seul logarithme. **Ensuite :** pense à $(a-b)(a+b)$.

CORRIGÉ

Regroupement. $\sqrt{5} > 1$, donc $\sqrt{5}-1 > 0$; de plus $\sqrt{5}+1 > 0$. Le logarithme d'un produit donne

$$\begin{aligned} B &= \ln\left((\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)\right). \end{aligned}$$

Calcul du produit. Avec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right) &= 5-1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Conclusion. $B = \ln 4 = 2\ln 2$.

Exercice 4

Deux équations et une inéquation

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x+1) = \ln(x+6)$.

INDICE

Début : cherche d'abord les réels pour lesquels les deux logarithmes existent.

CORRIGÉ

Domaine. Il faut $2x+1>0$ et $x+6>0$, soit $x > -\dfrac{1}{2}$ et $x > -6$. L'équation est posée sur

$$D = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$

Résolution. Pour $A>0$ et $B>0$, $\ln A = \ln B$ équivaut à $A = B$. Sur D, l'équation équivaut donc à $2x+1 = x+6$, soit $x = 5$.

Conclusion. Le réel 5 appartient à D, donc $S = \{5\}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x-2) = 3$.

INDICE

Outil : écris 3 comme le logarithme d'un réel strictement positif.

CORRIGÉ

Domaine. Il faut $x-2>0$, soit $x>2$.

Résolution. On écrit $3 = \ln\left(\mathrm{e}^3\right)$. Sur $]2;+\infty[$, l'équation équivaut à $\ln(x-2) = \ln\left(\mathrm{e}^3\right)$, donc à $x-2 = \mathrm{e}^3$, soit $x = 2+\mathrm{e}^3$.

Conclusion. $2+\mathrm{e}^3 > 2$, donc $S = \left\{2+\mathrm{e}^3\right\}$, avec $2+\mathrm{e}^3 \approx 22{,}09$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(3-x) < \ln 2$.

INDICE

Outil : la fonction $\ln$ garde l'ordre. **Point délicat :** n'oublie pas la condition d'existence.

CORRIGÉ

Domaine. Il faut $3-x>0$, soit $x<3$.

Ordre. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Sur $]-\infty;3[$, l'inéquation équivaut donc à $3-x<2$, soit $x>1$.

Conclusion. On garde les réels x tels que $1<x<3$: $S =]1;3[$.

Exercice 5

Premières limites avec ln

1.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+5\ln x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)$.

INDICE

Outil : les limites de $\ln$ en $+\infty$ et en 0^+, puis les règles sur les sommes.

CORRIGÉ

Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc $5\ln x$ tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}(2+5\ln x)=+\infty.$$

Limite en 0^+. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, et $-\dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$. Les deux termes tendent vers $-\infty$: il n'y a pas d'indétermination, et

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=-\infty.$$

2.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-4}{x}$.

INDICE

Début : coupe la fraction en deux : $\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{4}{x}$.

CORRIGÉ

Découpage. Pour $x>0$:

$$\frac{\ln x-4}{x}=\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{x}.$$

Limite de chaque terme. D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. De plus, $\dfrac{4}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Conclusion. La limite vaut 0 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-4}{x}=0$.

3.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+6x)}{4x}$.

INDICE

Outil : pose $h = 6x$ pour retrouver $\dfrac{\ln(1+h)}{h}$. **Point délicat :** le coefficient devant.

CORRIGÉ

Transformation. Soit $x \neq 0$ tel que $1 + 6x > 0$. On pose $h = 6x$:

$$\begin{aligned} &\frac{\ln(1+6x)}{4x} \\ &= \frac{6}{4} \times \frac{\ln(1+6x)}{6x} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{\ln(1+h)}{h}. \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 0, h tend vers 0, et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Conclusion. La limite vaut $\dfrac{3}{2}$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+6x)}{4x} = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 6

Dériver des fonctions avec ln u

1.

Justifier que $x^2-4x+7>0$ pour tout réel x. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(x^2-4x+7\right)$.

INDICE

Début : écris $x^2-4x+7=(x-2)^2+3$. **Outil :** $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

CORRIGÉ

Signe du trinôme. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2-4x+7 &= (x-2)^2+3 \\ &\geq 3>0. \end{aligned}$$

Dérivée. Posons $u(x)=x^2-4x+7$: u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x)=2x-4$. D'après la dérivée de $\ln u$, égale à $\dfrac{u'}{u}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{2x-4}{x^2-4x+7}.$$

2.

En déduire le sens de variation de f et son minimum.

INDICE

Outil : le dénominateur est strictement positif ; le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-4$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $2x-4$. Ainsi $f'(x)<0$ si $x<2$, $f'(2)=0$, et $f'(x)>0$ si $x>2$.

Variations. f est strictement décroissante sur $]-\infty;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

Minimum. f atteint donc son minimum en 2 :

$$\begin{aligned} f(2) &= \ln(4-8+7) \\ &= \ln 3. \end{aligned}$$

Conclusion. f décroît puis croît, et son minimum sur $\mathbb{R}$ vaut $\ln 3$, atteint en 2.

3.

Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $\left]-\frac{1}{4};+\infty\right[$ par $g(x)=3x-\ln(4x+1)$. Écrire $g'(x)$ sous la forme d'un seul quotient.

INDICE

Point délicat : la dérivée de $4x+1$ vaut 4, pas 1.

CORRIGÉ

Dérivée. Pour x dans $\left]-\frac{1}{4};+\infty\right[$, on a $4x+1>0$. La dérivée de $x\mapsto\ln(4x+1)$ est $x\mapsto\dfrac{4}{4x+1}$, donc

$$g'(x)=3-\frac{4}{4x+1}.$$

Un seul quotient. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3(4x+1)-4}{4x+1} \\ &= \frac{12x-1}{4x+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $\left]-\frac{1}{4};+\infty\right[$, $g'(x)=\dfrac{12x-1}{4x+1}$.

Exercice 7

Reconnaître la forme u'/u

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$.

INDICE

Outil : dérive le dénominateur et compare au numérateur. **Point délicat :** vérifie que le dénominateur ne s'annule pas.

CORRIGÉ

Dénominateur. Posons $u(x) = x^2+3x+4$. Pour tout réel x :

$$u(x) = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0.$$

Forme $\dfrac{u'}{u}$. $u'(x) = 2x+3$: la fonction proposée est $\dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est

$$x \mapsto \ln\left(x^2+3x+4\right).$$

2.

Un atelier fictif fabrique x centaines d'objets, avec $x \geq 0$. Son coût marginal, dérivée de son coût total, vaut $c(x) = \dfrac{5}{x+4}$ milliers de dirhams. Déterminer une primitive de c sur $[0;+\infty[$.

INDICE

Début : avec $u(x) = x+4$, on a $u'(x) = 1$; sors le facteur 5.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x+4$: $u'(x) = 1$ et $u(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$. Ainsi, pour $x \geq 0$,

$$c(x) = 5 \times \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Conclusion. Une primitive de c sur $[0;+\infty[$ est $x \mapsto 5\ln(x+4)$. C'est un coût total possible : le coût total n'est connu qu'à une constante près.

3.

Déterminer une primitive sur $]-\infty;-2[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{3x+6}$.

INDICE

Début : la dérivée de $3x+6$ vaut 3 : fais apparaître $\dfrac{3}{3x+6}$. **Point délicat :** le signe de $3x+6$ sur l'intervalle.

CORRIGÉ

Forme. La dérivée de $3x+6$ vaut 3, donc

$$\frac{1}{3x+6} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x+6}.$$

Signe. Pour $x < -2$, $3x+6 < 0$: $\ln(3x+6)$ n'existe pas. On utilise $-3x-6 > 0$, de dérivée -3 :

$$\frac{3}{3x+6} = \frac{-3}{-3x-6}.$$

Conclusion. Une primitive sur $]-\infty;-2[$ est

$$x \mapsto \frac{1}{3}\ln(-3x-6).$$

Exercice 8

Logarithme de base a et puissances de 10

1.

Calculer $\log_2 64$, $\log 0{,}0001$ et $\log_5 \sqrt{5}$.

INDICE

Outil : repère quelle puissance de a donne le nombre proposé ; sers-toi ensuite de $\log_a a = 1$.

CORRIGÉ

Il suffit de reconnaître dans chaque nombre une puissance entière de la base, car $\log_a (a^n) = n$.

- $64 = 2^6$, donc $\log_2 64 = 6$.
- $0{,}0001 = 10^{-4}$, donc $\log 0{,}0001 = -4$.
- Avec $\log_5 x = \dfrac{\ln x}{\ln 5}$ et $\ln \sqrt{5} = \dfrac{1}{2}\ln 5$:

$$\begin{aligned}\log_5 \sqrt{5} &= \frac{\frac{1}{2}\ln 5}{\ln 5}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^x = 70$. Donner une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.

INDICE

Outil : pour $a > 0$, $10^x = a$ équivaut à $x = \log a$.

CORRIGÉ

Équivalence. Pour $a > 0$, $10^x = a$ équivaut à $x = \log a$. Comme $70 > 0$, l'équation équivaut à $x = \log 70$.

Conclusion. $S = \{\log 70\}$. La calculatrice affiche $\log 70 \approx 1{,}845$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $10^x \geq 0{,}5$.

INDICE

Outil : même équivalence, avec le sens de l'inégalité conservé.

CORRIGÉ

Équivalence. $0{,}5 > 0$ et la fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$: $10^x \geq 0{,}5$ équivaut à $\log(10^x) \geq \log 0{,}5$, soit $x \geq \log 0{,}5$.

Conclusion. $S = [\log 0{,}5;+\infty[$, avec $\log 0{,}5 \approx -0{,}301$.