BURHAN

Fonctions logarithmiques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-logarithmiques/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions logarithmiques	Semestre 2

En combien d'années un capital double-t-il ?

Voici une situation fictive. Nadia place $10\,000$ dirhams sur un compte à intérêts composés, au taux annuel de 5 pour cent.

D'une année à la suivante, son capital est multiplié par $1{,}05$. Au bout de n années, il vaut $10\,000 \times 1{,}05^{n}$ dirhams.

Quand son capital aura-t-il doublé ? Nadia tâtonne à la calculatrice : $1{,}05^{5} \approx 1{,}276$, puis $1{,}05^{10} \approx 1{,}629$. Le double n'est pas encore atteint.

Devine : Une prédiction

Au bout de combien d'années le capital de Nadia atteint-il pour la première fois le double, soit $20\,000$ dirhams ?

A. Au bout de 10 ans.

Faux.
La calculatrice affiche $1{,}05^{10} \approx 1{,}629$: le capital n'a pas encore doublé.

B. Au bout de 20 ans, car $20 \times 5 = 100$.

Faux.
Ce calcul oublie que les intérêts déjà gagnés rapportent à leur tour : le doublement arrive plus tôt.

C. Au bout de 15 ans.

Juste.
Juste : $1{,}05^{14}$ reste sous 2, et $1{,}05^{15}$ le dépasse.

D. Jamais : il grandit trop lentement.

Faux.
Le tâtonnement montre que $1{,}05^{15}$ dépasse 2 : le capital finit bien par doubler.

Correction

On poursuit le tâtonnement : $1{,}05^{14} \approx 1{,}980$ et $1{,}05^{15} \approx 2{,}079$.

Le capital double donc pour la première fois au bout de 15 ans.

C'est plus tôt que 20 ans : les intérêts déjà gagnés produisent eux-mêmes des intérêts.

Tâtonner fonctionne, mais à l'aveugle. Il faudrait un outil qui fait « descendre » l'exposant n.

Cet outil existe : c'est le **logarithme népérien**, noté $\ln$.

Dans ce chapitre, tu découvres cette fonction et ses règles de calcul. Tu résous ensuite le problème de Nadia sans tâtonner. Tu étudies enfin des coûts et des bénéfices qui contiennent un logarithme.

La fonction logarithme népérien

Une fonction nouvelle

Devine : Une primitive introuvable

Pour faire « descendre » l'exposant du capital de Nadia, il faut une fonction nouvelle. On la cherche parmi les primitives.

Pour $n \neq -1$, une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Or $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Que donne cette formule avec $n = -1$?

A. $x \mapsto x^0$, c'est-à-dire la constante 1.

Faux.

La dérivée d'une constante est nulle, pas $\dfrac{1}{x}$.

B. Rien : il faudrait diviser par 0.

Juste.

Juste : avec $n = -1$, le dénominateur $n + 1$ est nul.

C. $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, une fonction connue.

Faux.

C'est la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, pas l'une de ses primitives.

D. $x \mapsto \dfrac{x^{-2}}{-2}$, en décalant l'exposant.

Faux.

Sa dérivée est $x \mapsto x^{-3}$, pas $x \mapsto x^{-1}$.

Correction

Avec $n = -1$, la formule donne $\dfrac{x^0}{0}$: elle n'a pas de sens. Aucune fonction $x \mapsto x^k$, avec k entier, n'a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Pourtant, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$: elle y a des primitives. L'une d'elles mérite un nom.

En clair. Les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ diffèrent toutes d'une constante. On en choisit une seule : celle qui s'annule en 1. C'est le logarithme népérien.

Définition : La fonction logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$; elle y admet donc des primitives. On appelle **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Ainsi $\ln$ est définie sur $]0;+\infty[$, et $\ln 1 = 0$. On écrit $\ln x$ (ou $\ln(x)$) l'image d'un réel $x > 0$; $\ln x$ n'a pas de sens si $x \leq 0$.

Remarque

L'existence de cette primitive est admise. Elle repose sur un résultat du chapitre des primitives, admis lui aussi : une fonction continue sur un intervalle a des primitives sur cet intervalle.

Exemple : quand le logarithme a-t-il un sens ?

- $\ln 5$ existe, car $5 > 0$; la calculatrice affiche $\ln 5 \approx 1{,}609$.
- $\ln 0$ et $\ln(-4)$ n'ont pas de sens : 0 et -4 ne sont pas strictement positifs.
- $\ln(x-3)$ a un sens seulement si $x - 3 > 0$, c'est-à-dire si $x > 3$.

Sens de variation et signe

En clair. À la calculatrice, $\ln 0{,}5 \approx -0{,}693$, $\ln 1 = 0$ et $\ln 2 \approx 0{,}693$. Les valeurs augmentent avec x et changent de signe en 1.

Pourquoi est-ce vrai ? La dérivée de $\ln$ est connue dès sa définition. Il suffit d'en lire le signe.

Propriété : Dérivée, sens de variation et signe de ln

- La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.
- Pour tout $x > 0$: $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln x > 0$ si $x > 1$.

Démonstration

Étape 1. Par définition, $\ln$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$: elle y est dérivable et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Étape 2. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$. D'après le lien entre le signe de la dérivée et les variations, $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Étape 3. Si $a < b$, alors $\ln a < \ln b$ (stricte croissance). Réciproquement, si $\ln a < \ln b$, on n'a ni $a = b$ (les logarithmes seraient égaux) ni $a > b$ (on aurait $\ln a > \ln b$) : donc $a < b$. Enfin, si $a = b$, alors $\ln a = \ln b$; si $a \neq b$, l'un est plus petit et les logarithmes diffèrent.

Étape 4. Avec $b = 1$ et $\ln 1 = 0$: $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

À retenir **: Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Tout part de la **dérivée** : son signe donne le sens de variation. Ensuite, on compare chaque nombre au repère 1, dont le logarithme est nul : c'est ainsi qu'on lit le signe de $\ln x$.

Vérifie : Égalité de deux logarithmes

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Dans la preuve, pourquoi deux logarithmes égaux, $\ln a = \ln b$, ont-ils le même contenu, $a = b$?

A. Si $a \neq b$, l'un est plus petit : l'ordre strict est conservé.

Juste.

Juste : la stricte croissance donne alors $\ln a \neq \ln b$.

B. Car $\ln$ est continue sur tout l'intervalle $]0; +\infty[$.

Faux.

Une fonction continue peut prendre deux fois la même valeur : la continuité ne suffit pas.

C. Car on simplifie par $\ln$ des deux côtés de l'égalité.

Faux.

$\ln$ n'est pas un facteur : on ne « simplifie » pas par une fonction.

D. Car $\ln 1 = 0$, et 1 est le seul repère utile.

Faux.

Ce repère sert pour le signe de $\ln x$, pas pour comparer deux logarithmes.

Correction

La preuve raisonne sur l'ordre : si $a \neq b$, l'un est plus petit et les logarithmes diffèrent.

Par exemple, si $a < b$, la stricte croissance de $\ln$ donne $\ln a < \ln b$, donc $\ln a \neq \ln b$.

Ainsi, $\ln a = \ln b$ n'est possible que si $a = b$.

Exemple **: comparer et lire un signe**

- $0{,}8 < 1$, donc $\ln 0{,}8 < 0$; et $3{,}5 > 1$, donc $\ln 3{,}5 > 0$.
- $\dfrac{7}{3} = \dfrac{14}{6}$ et $2{,}5 = \dfrac{15}{6}$, donc $\dfrac{7}{3} < 2{,}5$. Comme $\ln$ est strictement croissante, $\ln\left(\dfrac{7}{3}\right) < \ln 2{,}5$.

- **L'hypothèse compte.** On a $-3 < -2$, mais on ne compare pas $\ln(-3)$ et $\ln(-2)$: ils n'existent pas.

Où le logarithme a un sens

Méthode : trouver le domaine d'une expression

1. **Repère** chaque logarithme de l'expression et ce qu'il contient.
2. **Écris** une condition « contenu strictement positif » par logarithme, et « différent de 0 » pour chaque dénominateur.
3. **Résous** chaque condition, puis **garde** les réels qui les vérifient toutes à la fois : c'est le domaine.

Exemple : deux domaines

- $\ln(2x-6)+\ln(10-x)$ demande $2x-6>0$ et $10-x>0$, soit $x>3$ et $x<10$. Le domaine est $]3;10[$.
- $\dfrac{\ln(x+4)}{x-1}$ demande $x+4>0$ et $x-1\neq 0$, soit $x>-4$ et $x\neq 1$. Le domaine est $]-4;1[\cup]1;+\infty[$.

À toi : Un domaine, puis un signe

Détermine le domaine de $\ln(15-3x)$. Pour quels réels x ce logarithme est-il strictement négatif ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la condition qui donne un sens au logarithme.
Indice 2
Un logarithme est strictement négatif lorsque son contenu est entre 0 et 1 : traduis cette condition pour $15-3x$.
Indice 3
Point délicat : en divisant par -3, le sens des inégalités change.

Réponse
Domaine. Le logarithme a un sens si $15-3x>0$, soit $-3x>-15$, donc $x<5$. Le domaine est $]-\infty;5[$.

Signe. Sur ce domaine, $\ln(15-3x)<0$ équivaut à $15-3x<1$, soit $-3x<-14$, donc $x>\dfrac{14}{3}$.

Conclusion. Le logarithme est strictement négatif pour $x\in\left]\dfrac{14}{3};5\right[$.

Contrôle avec $x = 4{,}8$: $15 - 3 \times 4{,}8 = 0{,}6$, et $\ln 0{,}6 < 0$ car $0{,}6 < 1$.

Propriétés algébriques

À la calculatrice

Rappel. $2^3 \times 2^4 = 2^7$: quand on multiplie deux puissances de 2, les exposants s'additionnent. Un produit devient une somme. Le logarithme fait-il de même ?

Devine : Un produit à la calculatrice

La calculatrice affiche $\ln 2 \approx 0{,}693$ et $\ln 3 \approx 1{,}099$. Que va-t-elle afficher pour $\ln 6$?

A. $0{,}762$, le produit des deux

Faux.
C'est $\ln 2 \times \ln 3$; la calculatrice donne autre chose pour $\ln 6$.

B. $1{,}792$, la somme des deux

Juste.
Juste : $0{,}693 + 1{,}099 = 1{,}792$.

C. $1{,}585$, le quotient des deux

Faux.
C'est $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$, pas $\ln 6$.

D. $0{,}405$, l'écart des deux

Faux.
C'est $\ln 3 - \ln 2$, pas $\ln 6$.

Correction
La calculatrice affiche $\ln 6 \approx 1{,}792$. Or $0{,}693 + 1{,}099 = 1{,}792$.

Le logarithme de $6 = 2 \times 3$ semble donc être la somme des logarithmes de 2 et de 3. Ce n'est pas un hasard.

Le logarithme d'un produit

En clair. Le logarithme semble transformer un produit en somme.

Pourquoi est-ce vrai ? On fixe un réel $a > 0$. On compare $\ln(ax)$ et $\ln x$ par leur différence, étudiée comme une fonction de x : sa dérivée renseigne sur elle.

Théorème : Logarithme d'un produit

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Le logarithme transforme un produit en somme.

Démonstration

Étape 1. On fixe $a > 0$ et on pose, pour $x > 0$, $g(x) = \ln(ax) - \ln x$. La fonction $x \mapsto ax$ est dérivable et strictement positive sur $]0;+\infty[$; d'après la dérivée d'une fonction composée, g est dérivable et

$$g'(x) = a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0.$$

Étape 2. La fonction g a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc elle y est constante : pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1) = \ln a - \ln 1 = \ln a$.

Étape 3. Ainsi $\ln(ax) = \ln a + \ln x$ pour tout $x > 0$; avec $x = b$, on obtient $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : étudier une **fonction auxiliaire**, la différence $\ln(ax) - \ln x$. Quand une dérivée est nulle sur un intervalle, ici $]0;+\infty[$, la fonction y est constante. Une valeur bien choisie de x donne alors cette constante.

Vérifie : La valeur bien choisie

Dans la preuve, en quel réel évalue-t-on $g : x \mapsto \ln(ax) - \ln x$ pour trouver la constante ?

A. En $x = 0$, le plus simple

Faux.

$\ln 0$ n'existe pas : g n'est pas définie en 0.

B. En $x = 2$, pour obtenir $\ln 2$

Faux.

$g(2) = \ln(2a) - \ln 2$ ne se simplifie pas sans la propriété qu'on démontre.

C. En $x = a$, pour faire apparaître a

Faux.

$g(a) = \ln\left(a^2\right) - \ln a$ demanderait aussi la propriété qu'on démontre.

D. En $x = 1$, car $\ln 1 = 0$

Juste.

Juste : $g(1) = \ln a - \ln 1 = \ln a$.

Correction

La fonction g est constante sur $]0;+\infty[$. On l'évalue en $x = 1$: $g(1) = \ln a - \ln 1 = \ln a$, car $\ln 1 = 0$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\ln(ax) - \ln x = \ln a$. Avec $x = b$, on obtient :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Exemple : un produit, une hausse de prix

- $\ln 15 = \ln(3 \times 5) = \ln 3 + \ln 5$.
- Situation fictive : un prix augmente de 20 pour cent, puis de 50 pour cent. Il est multiplié par $1{,}2$, puis par $1{,}5$, donc par $1{,}8$ au total. Ainsi, $\ln 1{,}8 = \ln 1{,}2 + \ln 1{,}5$.
- **L'hypothèse compte.** $(-2) \times (-3) = 6$, mais on ne peut pas écrire $\ln 6 = \ln(-2) + \ln(-3)$: ces logarithmes n'existent pas.

Inverse, quotient, puissance, racine

En clair. $8 = 2 \times 2 \times 2$, donc $\ln 8 = \ln 2 + \ln 2 + \ln 2 = 3 \ln 2$. Un exposant devient un facteur.

Pourquoi est-ce vrai ? Les règles qui suivent se déduisent toutes du logarithme d'un produit, en écrivant chaque nombre comme un produit bien choisi.

Propriété : Inverse, quotient, puissance et racine carrée

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et pour tout entier relatif n :

- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$;
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;
- $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$;
- $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

Démonstration

Étape 1. Comme $\dfrac{1}{b} > 0$ et $b \times \dfrac{1}{b} = 1$, le logarithme d'un produit donne $\ln b + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln 1 = 0$.

Étape 2. Comme $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$, le logarithme d'un produit puis l'étape 1 donnent $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Étape 3. Pour n entier naturel, par récurrence. Initialisation : $\ln\left(a^0\right) = \ln 1 = 0$. Hérédité : si $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$, comme $a^n > 0$ et $a > 0$, le logarithme d'un produit donne $\ln\left(a^{n+1}\right) = \ln\left(a^n\right) + \ln a = (n+1) \ln a$. Conclusion : la formule vaut pour tout entier naturel n.

Étape 4. Pour n entier négatif, $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ avec $-n$ entier naturel ; l'étape 1 puis l'étape 3 appliquée à $-n$ donnent $\ln\left(a^n\right) = -(-n) \ln a = n \ln a$.

Étape 5. Comme $\sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, on a $2 \ln \sqrt{a} = \ln a$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une seule règle suffit, celle du **produit** : on écrit chaque nombre comme un produit bien choisi. Les exposants entiers naturels demandent en plus un raisonnement par récurrence.

Vérifie : L'inverse

Dans la preuve, d'où vient l'égalité $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$?

A. De la récurrence sur les exposants entiers.

Faux.

La récurrence ne traite que les exposants entiers naturels ; l'inverse est établi avant elle.

B. De la stricte croissance de la fonction $\ln$.

Faux.

Elle sert à comparer ; elle ne donne pas une égalité de ce type.

C. De $b \times \frac{1}{b} = 1$, avec $\ln 1 = 0$.

Juste.

Juste : le logarithme d'un produit donne $\ln b + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$.

D. De l'égalité $\ln(-b) = -\ln b$.

Faux.

Ce logarithme n'existe pas : $-b < 0$.

Correction

Comme $b \times \frac{1}{b} = 1$, le logarithme d'un produit donne $\ln b + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 = 0$. Donc :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b.$$

Exemple : simplifier une expression

D'abord, $2\ln\sqrt{2} = \ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right) = \ln 2$. Ensuite :

$$\begin{aligned} &\ln 12 - \ln 3 + 2\ln\sqrt{2} \\ &= \ln\left(\frac{12}{3}\right) + \ln 2 \\ &= \ln 4 + \ln 2 \\ &= \ln 8 = 3\ln 2. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}&\ln\left(\frac{1}{25}\right)+3\ln 5\\&=-2\ln 5+3\ln 5\\&=\ln 5.\end{aligned}$$

Deux pièges, puis à toi

Attention : le logarithme d'une somme

✗ « $\ln(4+4)=\ln 4+\ln 4$. »

✓ On a $\ln 4+\ln 4=\ln(4\times 4)=\ln 16$, alors que $\ln(4+4)=\ln 8$. Or $8\neq 16$, donc $\ln 8\neq\ln 16$.

Le logarithme change un **produit** en somme, jamais une somme en somme.

De même, $\dfrac{\ln 8}{\ln 2}=\dfrac{3\ln 2}{\ln 2}=3$, qui n'est pas $\ln 4$.

Attention : le logarithme d'un carré

✗ « $\ln\left(x^2\right)=2\ln x$ pour tout réel x non nul. »

✓ Pour $x=-5$: $\ln\left((-5)^2\right)=\ln 25=2\ln 5$, mais $2\ln(-5)$ n'existe pas.

Pour tout réel x non nul, la bonne écriture est $\ln\left(x^2\right)=2\ln|x|$.

À toi : Avec les logarithmes de 2 et de 3

Écris en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$: $A=\ln 72$, $B=\ln\left(\dfrac{9}{16}\right)$ et $C=\ln\sqrt{18}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Décompose chaque nombre en produit de puissances de 2 et de 3.
Indice 2
Compte combien de fois tu peux diviser chaque nombre par 2, puis par 3 ; applique ensuite les règles du produit, du quotient et de la puissance.
Indice 3
Point délicat : pour la racine carrée, le facteur $\dfrac{1}{2}$ porte sur tout $\ln 18$.

Réponse

$$\begin{aligned}A&=\ln\left(2^3\times 3^2\right)\\&=3\ln 2+2\ln 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\ln\left(3^2\right)-\ln\left(2^4\right)\\&=2\ln 3-4\ln 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\ln 18 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2 + 2\ln 3) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3. \end{aligned}$$

Contrôle à la calculatrice : $\ln 72 \approx 4{,}277$, et $3 \times 0{,}693 + 2 \times 1{,}099 = 4{,}277$.

Équations, inéquations et systèmes

Équations

Devine : Une première équation

Le problème de Nadia mène à une inéquation avec des logarithmes : apprenons d'abord à résoudre ce type de question.

Rappel : pour $a > 0$ et $b > 0$, $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$. Quelle est la solution de l'équation $\ln(2x - 1) = \ln 7$?

A. $x = 3$

Faux.

$2x - 1 = 7$ donne $2x = 8$, pas $2x = 6$.

B. $x = 4$

Juste.

Juste : $2 \times 4 - 1 = 7$.

C. $x = \dfrac{\ln 7 + 1}{2}$

Faux.

On a traité $\ln$ comme un facteur : il faut comparer les contenus des logarithmes.

D. Aucune solution

Faux.

$x = 4$ convient : $2 \times 4 - 1 = 7$, qui est strictement positif.

Correction

Domaine. L'équation a un sens si $2x - 1 > 0$, soit $x > \dfrac{1}{2}$.

Résolution. Deux logarithmes sont égaux exactement quand leurs contenus le sont : $2x - 1 = 7$, donc $x = 4$.

Conclusion. Comme $4 > \dfrac{1}{2}$, la solution est 4.

Méthode : résoudre une équation avec des logarithmes

1. **Cherche le domaine** D : chaque logarithme doit avoir un sens.

2. **Regroupe** chaque membre en un seul logarithme, avec les propriétés algébriques.
3. **Supprime les logarithmes** : $\ln A = \ln B$ équivaut à $A = B$, pour $A > 0$ et $B > 0$. Résous l'équation obtenue.
4. **Trie** les solutions : garde seulement celles qui sont dans D.

Exemple : une équation qui mène au second degré

On résout $\ln(x-1) + \ln(x+4) = \ln 14$.

- **Domaine** : $x - 1 > 0$ et $x + 4 > 0$, soit $x > 1$. Donc $D =]1; +\infty[$.
- **Regroupement** : pour tout $x \in D$, l'équation s'écrit $\ln\left((x-1)(x+4)\right) = \ln 14$.
- **Contenus** : $(x-1)(x+4) = 14$, soit $x^2 + 3x - 18 = 0$, ou encore $(x+6)(x-3) = 0$.
- **Tri** : $-6 \notin D$ et $3 \in D$. La solution est 3.

Inéquations

Méthode : résoudre une inéquation avec des logarithmes

1. **Cherche le domaine** D.
2. **Ramène-toi** à une comparaison de deux logarithmes : $\ln A < \ln B$, ou $\ln A \leq \ln B$.
3. **Compare les contenus** : $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln A < \ln B$ équivaut à $A < B$. Résous.
4. **Croise** le résultat avec D, et écris la solution sous forme d'intervalle.

Exemple : une inéquation

On résout $\ln(3-x) \leq \ln(2x+9)$.

- **Domaine** : $3 - x > 0$ et $2x + 9 > 0$, soit $x < 3$ et $x > -\dfrac{9}{2}$. Donc $D = \left]-\dfrac{9}{2}; 3\right[$.
- **Contenus** : sur D, l'inéquation équivaut à $3 - x \leq 2x + 9$, soit $-3x \leq 6$, donc $x \geq -2$.
- **Croisement** : $S = [-2; 3[$.

Attention : le domaine d'abord

✗ « $\ln x + \ln(x-3) = \ln 4$ donne $x(x-3) = 4$, donc $x = 4$ ou $x = -1$. »

✓ Il faut $x > 0$ et $x - 3 > 0$: le domaine est $]3; +\infty[$. Le calcul est juste, mais -1 n'est pas dans le domaine, car $\ln(-1)$ n'existe pas. La seule solution est 4.

Regrouper en $\ln(x(x-3))$ élargit le domaine : cherche-le toujours **avant** de transformer.

Systèmes

Méthode : résoudre un système avec des logarithmes

1. **Écris les conditions** : ici, $x > 0$ et $y > 0$.
2. **Change d'inconnues** : pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Chaque équation devient une équation du premier degré en X et Y.
3. **Résous** ce système, par substitution ou par combinaison.
4. **Reviens** à x et y : si $X = \ln 6$, alors $\ln x = \ln 6$ donne $x = 6$. **Vérifie** les conditions.

Exemple : un système

On résout, avec $x > 0$ et $y > 0$, le système :

$$\begin{cases} 2\ln x + \ln y = \ln 72 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{cases}$$

- **Inconnues** : avec $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, on obtient $2X + Y = \ln 72$ et $X - Y = \ln 3$.
- **Combinaison** : en additionnant, $3X = \ln 216 = 3\ln 6$, donc $X = \ln 6$, puis $Y = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2$.
- **Retour** : $x = 6$ et $y = 2$, strictement positifs.

Vérifie : Un système à toi

On résout, avec $x > 0$ et $y > 0$, le système formé de $\ln x + \ln y = \ln 16$ et de $\ln x - \ln y = \ln 4$. Quel couple $(x; y)$ est solution ?

A. Le couple $(10; 6)$
Faux.
Ce couple vérifie $x + y = 16$ et $x - y = 4$: on a oublié les logarithmes.

B. Le couple $(8; 2)$
Juste.
Juste : $\ln 8 + \ln 2 = \ln 16$ et $\ln 8 - \ln 2 = \ln 4$.

C. Le couple $(2; 8)$
Faux.

Avec $x = 2$ et $y = 8$, $\ln x - \ln y = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$, pas $\ln 4$.

D. Le couple $(\ln 8 ; \ln 2)$

Faux.

Ce sont les valeurs de $X = \ln x$ et de $Y = \ln y$: il reste à revenir à x et y.

Correction

Avec $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, le système devient $X + Y = \ln 16$ et $X - Y = \ln 4$.

En additionnant, $2X = \ln 64 = 2\ln 8$, donc $X = \ln 8$. Puis $Y = \ln 16 - \ln 8 = \ln 2$.

Ainsi $x = 8$ et $y = 2$, qui sont strictement positifs.

Retour au capital

Exemple : le capital de Nadia, sans tâtonner

On cherche le plus petit entier n tel que $1{,}05^n \geq 2$.

- La fonction $\ln$ est strictement croissante : l'inéquation équivaut à $\ln\left(1{,}05^n\right) \geq \ln 2$, soit $n \ln 1{,}05 \geq \ln 2$.
- Comme $1{,}05 > 1$, on a $\ln 1{,}05 > 0$: on divise sans changer le sens. Donc $n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05}$.
- La calculatrice affiche $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2$. Le plus petit entier est $n = 15$: le capital double pour la première fois au bout de 15 ans.

Vérifie : À un autre taux

Un autre capital fictif est placé au taux annuel de 8 pour cent. On cherche le plus petit entier n tel que $1{,}08^n \geq 2$. Quelle inéquation lui est équivalente ?

A. $n \leq \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}08}$

Faux.

$\ln 1{,}08 > 0$: diviser par ce nombre ne change pas le sens.

B. $n \geq \dfrac{2}{1{,}08}$

Faux.

On a divisé les nombres au lieu de leurs logarithmes : l'exposant n'est pas descendu.

C. $n \geq \ln\left(\dfrac{2}{1{,}08}\right)$

Faux.

Le quotient de deux logarithmes n'est pas le logarithme du quotient.

D. $n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}08}$

Juste.

Juste : on applique $\ln$, puis on divise par $\ln 1{,}08 > 0$.

Correction

La fonction $\ln$ est strictement croissante, donc $1{,}08^n \geq 2$ équivaut à $n \ln 1{,}08 \geq \ln 2$.

Comme $1{,}08 > 1$, on a $\ln 1{,}08 > 0$. On divise sans changer le sens :

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1{,}08}.$$

La calculatrice affiche $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}08} \approx 9{,}006$: ce capital double au bout de 10 ans.

Remarque : Coin examen : rédiger une équation logarithmique

Voici une rédaction complète, à reproduire.

« L'équation $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 5$ a un sens si $x - 2 > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 2$: $D =]2; +\infty[$. Pour $x \in D$, elle équivaut à $\ln\left((x-2)(x+2)\right) = \ln 5$, puis à $x^2 - 4 = 5$, soit $x^2 = 9$. Donc $x = 3$ ou $x = -3$. Or $-3 \notin D$: l'ensemble des solutions est $S = \{3\}$. »

Chaque étape annonce ce qu'elle fait : domaine, regroupement, comparaison des contenus, tri.

À toi : Une équation, une inéquation

Résous l'équation $\ln(x+3) + \ln x = \ln 10$, puis l'inéquation $\ln(x+5) > \ln(1-2x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour chacune, commence par le domaine : une condition par logarithme.

Indice 2

Pour l'équation, regroupe le membre de gauche en un seul logarithme, puis compare les contenus : une équation du second degré apparaît. Pour l'inéquation, compare directement les contenus.

Indice 3

Point délicat : une racine de l'équation sort du domaine ; pour l'inéquation, croise l'intervalle trouvé avec le domaine.

Réponse

Équation. Il faut $x > 0$ et $x + 3 > 0$, donc $D =]0; +\infty[$. Pour tout $x \in D$, l'équation équivaut à $\ln\left(x(x+3)\right) = \ln 10$, puis à $x^2 + 3x - 10 = 0$, soit $(x+5)(x-2) = 0$.

Comme $-5 \notin D$ et $2 \in D$, on obtient $S = \{2\}$.

Inéquation. Il faut $x+5>0$ et $1-2x>0$, donc $D=\left]-5;\dfrac{1}{2}\right[$. Sur D, elle équivaut à $x+5>1-2x$, soit $3x>-4$, donc $x>-\dfrac{4}{3}$.

En croisant avec D, on obtient $S=\left]-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{2}\right[$.

Le mot du prof. Domaine, regroupement, comparaison, tri : avec ces quatre gestes, tu viens de résoudre le problème de Nadia sans tâtonner. Bravo.

Limites et nombre e

Aux bornes du domaine

Devine : Très grand

Situation fictive : une entreprise estime que x dirhams de publicité lui rapportent un gain qui suit $\ln x$. Plus elle dépense, plus elle gagne, mais à quel rythme ?

La calculatrice affiche $\ln 10\approx 2{,}303$, $\ln 1\,000\approx 6{,}908$ et $\ln 1\,000\,000\approx 13{,}816$.

Que deviennent les valeurs de $\ln x$ lorsque x devient de plus en plus grand ?

A. Elles se rapprochent d'un plafond, vers 14.

Faux.

Aucun plafond : $\ln\left(10^{n}\right)=n\ln 10$ dépasse tout réel quand n grandit.

B. Elles finissent par diminuer, après un maximum.

Faux.

$\ln$ est strictement croissante : ses valeurs ne diminuent jamais quand x augmente.

C. Elles dépassent tout réel, mais lentement.

Juste.

Juste : multiplier x par $1\,000$ n'ajoute qu'environ $6{,}9$ au logarithme.

D. Elles grandissent aussi vite que x lui-même.

Faux.

Pour $x=1\,000\,000$, $\ln x$ ne vaut même pas 14.

Correction

D'après la règle des puissances, $\ln\left(10^{n}\right)=n\ln 10$ pour tout entier n. Pour $n=100$, on dépasse déjà 230 ; pour $n=1\,000$, on dépasse $2\,300$.

Les valeurs de $\ln x$ dépassent donc tout réel, mais très lentement.

Près de 0, c'est l'inverse : $\ln\left(10^{-n}\right)=-n\ln 10$ devient très négatif.

Propriété : Limites de ln aux bornes de son domaine

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est donc asymptote à la courbe de $\ln$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : des limites sans forme indéterminée

- $\lim_{x\to+\infty} (2\ln x + 3) = +\infty$, car $\ln x$ tend vers $+\infty$.
- En 0^+, $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\dfrac{1}{3x}$ tend vers $+\infty$. Leur produit donne $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{3x} = -\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} (x + \ln x) = +\infty$: c'est la somme de deux termes qui tendent vers $+\infty$.

Le nombre e

En clair. Cherche x tel que $\ln x = 1$. La calculatrice donne $\ln 2 \approx 0{,}693$, trop petit, et $\ln 3 \approx 1{,}099$, trop grand : la solution est entre 2 et 3.

Pourquoi est-ce vrai ? La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante, et ses limites aux bornes sont $-\infty$ et $+\infty$. Elle prend donc chaque valeur réelle, et une seule fois.

Propriété : Le nombre e

Pour tout réel m, l'équation $\ln x = m$ admet **une unique solution** dans $]0;+\infty[$.

On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln \mathrm{e} = 1$. On a $\mathrm{e} \approx 2{,}718$, et, pour tout entier relatif n, $\ln(\mathrm{e}^n) = n$.

Démonstration

Étape 1. La fonction $\ln$ est dérivable, donc continue, et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ (dérivée, sens de variation et signe de ln).

Étape 2. D'après l'image d'un intervalle par une fonction continue strictement croissante et les limites de ln aux bornes, l'image de $]0;+\infty[$ par $\ln$ est $]-\infty;+\infty[$, c'est-à-dire $\mathbb{R}$.

Étape 3. Tout réel m a donc au moins un antécédent ; il n'en a qu'un, car $\ln$ est strictement croissante. Pour $m = 1$, cet antécédent est le nombre e ; la calculatrice en donne la valeur approchée $2{,}718$.

Étape 4. D'après la puissance d'exposant entier, $\ln(\mathrm{e}^n) = n\ln \mathrm{e} = n$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux questions, deux arguments. **Existence** : une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes, prend toutes les valeurs réelles. **Unicité** : la stricte croissance interdit de prendre deux fois la même valeur.

Vérifie : Les puissances de e

Dans la preuve, pourquoi a-t-on $\ln\left(\mathrm{e}^{n}\right) = n$ pour tout entier relatif n ?

A. Par la règle des puissances, avec $\ln \mathrm{e} = 1$.

Juste.
Juste : $\ln\left(\mathrm{e}^{n}\right) = n \ln \mathrm{e} = n$.

B. Par la seule définition du nombre e.

Faux.
La définition donne seulement $\ln \mathrm{e} = 1$, c'est-à-dire le cas $n = 1$.

C. Par la stricte croissance de la fonction $\ln$.

Faux.
La stricte croissance compare ; elle ne calcule pas $\ln\left(\mathrm{e}^{n}\right)$.

D. Car $\ln$ et la puissance se simplifient.

Faux.
« Se simplifier » n'est pas un argument : il faut citer une propriété.

Correction
La règle des puissances d'exposant entier donne $\ln\left(\mathrm{e}^{n}\right) = n \ln \mathrm{e}$.

Or $\ln \mathrm{e} = 1$, par définition de e. Donc $\ln\left(\mathrm{e}^{n}\right) = n$.

Exemple : calculer avec e

- $\ln\left(\mathrm{e}^{4}\right) = 4$ et $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}\right) = -2$.
- $\ln\left(\mathrm{e}^{3} \times \sqrt{\mathrm{e}}\right) = 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$.
- L'équation $\ln x = -1$ a pour unique solution $x = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, car $\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = -1$. La calculatrice affiche $\mathrm{e} \approx 2{,}718$.

Le logarithme face aux puissances

En clair. Pour $x = 1\,000$, la calculatrice affiche $\ln x \approx 6{,}908$. Le quotient $\dfrac{\ln x}{x}$ vaut alors environ $0{,}007$.

Le logarithme tend vers $+\infty$, mais il est écrasé par x.

Propriété : Croissances comparées

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0.$$

En particulier, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$: au voisinage de $+\infty$, $\ln x$ est négligeable devant x.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : lever une forme indéterminée

En $+\infty$. L'expression $x - 3\ln x$ est de la forme « $+\infty - (+\infty)$ ». On factorise : pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} & x - 3\ln x \\ &= x\left(1 - 3 \times \frac{\ln x}{x}\right). \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0, la parenthèse tend vers 1, et la limite est $+\infty$.

En 0^+. D'après les croissances comparées avec $n = 2$, $x^2 \ln x$ tend vers 0.

Méthode, puis à toi

Méthode : calculer une limite avec un logarithme

1. **Essaie** d'abord les opérations sur les limites, avec les limites de $\ln$ aux bornes.
2. **En cas de forme indéterminée**, factorise par le terme le plus fort, ou fais apparaître une limite de référence : $\dfrac{\ln x}{x^n}$ en $+\infty$, $x^n \ln x$ en 0^+.
3. **Conclus** en nommant la limite de référence et l'opération utilisées.

La section suivante ajoute deux autres limites de référence.

À toi : Deux limites

Calcule $\lim_{x \to +\infty} (4x - 7\ln x)$ et $\lim_{x \to 0^+} (3x \ln x - 2)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Essaie d'abord les opérations : en $+\infty$, tu obtiens une forme « $+\infty - (+\infty)$ ».

Indice 2

Mets x en facteur : la limite de référence de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$ apparaît dans la parenthèse.

Indice 3

Point délicat : en 0^+, le produit $x \ln x$ est de la forme « $0 \times (-\infty)$ » ; c'est une croissance comparée qui conclut.

Réponse

En $+\infty$. On factorise : pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} &4x - 7\ln x \\ &= x\left(4 - 7 \times \frac{\ln x}{x}\right). \end{aligned}$$

D'après les croissances comparées, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 : la parenthèse tend vers 4. Le produit tend donc vers $+\infty$.

En 0^+. D'après les croissances comparées, $x \ln x$ tend vers 0. Donc $3x \ln x - 2$ tend vers $3 \times 0 - 2 = -2$.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} (4x - 7\ln x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} (3x \ln x - 2) = -2$.

Limites près de 1 et courbe de ln

Près de 1

Rappel. Le nombre dérivé d'une fonction g en 1 est la limite, quand x tend vers 1, du taux d'accroissement $\dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$.

Devine : Un quotient près de 1

Situation fictive : un prix est multiplié par x, proche de 1, ce qui correspond à une petite hausse ou une petite baisse. On compare $\ln x$ et la variation relative $x - 1$.

La calculatrice donne, pour le quotient $\dfrac{\ln x}{x - 1}$: environ $0{,}953$ en $x = 1{,}1$, environ $0{,}995$ en $x = 1{,}01$, et environ $1{,}005$ en $x = 0{,}99$.

Vers quel nombre ce quotient semble-t-il tendre quand x tend vers 1 ?

A. Vers 0, car $\ln 1 = 0$.

Faux.

Le dénominateur tend aussi vers 0 : c'est une forme indéterminée.

B. Vers $+\infty$, car on divise par presque 0.

Faux.

Le numérateur tend aussi vers 0 ; les valeurs affichées restent proches de 1.

C. Vers le nombre e.

Faux.

Les valeurs affichées sont proches de 1, loin de $2{,}718$.

D. Vers 1.

Juste.

Juste : les valeurs se resserrent autour de 1, des deux côtés.

Correction

Les valeurs se resserrent autour de 1, à gauche comme à droite.

Ce n'est pas un hasard : $\dfrac{\ln x - \ln 1}{x - 1}$ est un taux d'accroissement de $\ln$ entre 1 et x. Sa limite est le nombre dérivé de $\ln$ en 1, qui vaut $\dfrac{1}{1} = 1$.

Deux limites de référence

En clair. Près de 1, $\ln x$ et $x - 1$ sont tous deux proches de 0, mais leur quotient reste proche de 1.

Pourquoi est-ce vrai ? Le quotient est un taux d'accroissement de $\ln$. Sa limite est un nombre dérivé, celui du rappel.

Propriété : Limites liées au nombre dérivé de ln en 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1.$$

Démonstration

Étape 1. La fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ (dérivée, sens de variation et signe de ln). Par définition du nombre dérivé, $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = 1$.

Étape 2. Comme $\ln 1 = 0$, on obtient $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$.

Étape 3. On pose $x = 1 + h$, avec $h > -1$ et $h \neq 0$, de sorte que $x > 0$ et $x \neq 1$: x tend vers 1 lorsque h tend vers 0, et $\dfrac{\ln x}{x - 1} = \dfrac{\ln(1 + h)}{h}$. D'où la seconde limite.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une forme « $\dfrac{0}{0}$ » peut cacher un **nombre dérivé**. On reconnaît un taux d'accroissement, dont la limite est la dérivée au point. Ensuite, un simple changement d'écriture fait passer d'une limite à l'autre.

Vérifie : Le changement d'écriture

Dans la preuve, quel changement d'écriture fait passer de la limite en 1 à la limite de $\dfrac{\ln(1 + h)}{h}$ en 0 ?

A. On pose $x = 1 + h$.

Juste.

Juste : quand h tend vers 0, x tend vers 1, et $x - 1 = h$.

B. On pose $h = \ln x$.

Faux.

Alors $\dfrac{\ln x}{x - 1}$ ne devient pas $\dfrac{\ln(1 + h)}{h}$.

C. On remplace x par $\dfrac{1}{h}$.

Faux.

Quand h tend vers 0, $\dfrac{1}{h}$ ne tend pas vers 1.

D. On multiplie par $x - 1$.

Faux.

Le quotient disparaît : la limite deviendrait celle de $\ln x$.

Correction

On pose $x = 1 + h$, avec $h > -1$ et $h \neq 0$, de sorte que $x > 0$ et $x \neq 1$.

Lorsque h tend vers 0, x tend vers 1, et $\dfrac{\ln x}{x - 1} = \dfrac{\ln(1 + h)}{h}$. La seconde limite vaut donc aussi 1.

Exemple **: reconnaître une limite de référence**

En 1. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on écrit :

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln x}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1}.$$

Quand x tend vers 1, le premier facteur tend vers 1, le second vers $\dfrac{1}{2}$: la limite est $\dfrac{1}{2}$.

En $+\infty$. Pour $x > 0$, on pose $h = \dfrac{1}{x}$. Alors $x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(1 + h)}{h}$. Quand x tend vers $+\infty$, h tend vers 0 : la limite est 1.

La courbe de ln

En clair. Tu connais déjà beaucoup de choses sur $\ln$: deux valeurs, $\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e} = 1$, son nombre dérivé en 1, ses limites.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque point de la propriété qui suit traduit l'un de ces résultats sur la courbe.

Propriété **: Courbe représentative de ln**

Dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $\ln$:

- coupe l'axe des abscisses au point $(1; 0)$ et passe par le point $(\mathrm{e}; 1)$;

- admet au point d'abscisse 1 la tangente d'équation $y = x - 1$;
- admet l'axe des ordonnées pour asymptote ;
- admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Démonstration

Étape 1. On a $\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e} = 1$ (nombre e) : la courbe passe par $(1;0)$ et $(\mathrm{e};1)$.

Étape 2. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$, soit $y = x - 1$, car $\ln'(1) = 1$ (dérivée, sens de variation et signe de ln).

Étape 3. Comme $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (limites de ln aux bornes), la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

Étape 4. En $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$ (limites de ln aux bornes) et $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 (croissances comparées) : c'est une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une courbe se décrit en **rassemblant** des résultats déjà établis, chacun nommé. Une valeur donne un point, un nombre dérivé donne une tangente, une limite donne une asymptote ou une branche infinie.

Vérifie : La branche infinie

Dans la preuve, quel résultat montre que la branche de la courbe en $+\infty$ a la direction de l'axe des abscisses ?

A. La limite de $\ln x$ en $+\infty$, seule.

Faux.
Elle dit seulement que la courbe monte sans fin ; la direction vient d'un quotient.

B. Le nombre dérivé en 1, égal à 1.

Faux.
Il donne la tangente au point d'abscisse 1, pas le comportement en $+\infty$.

C. La limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$, égale à 0.

Juste.
Juste : avec $\ln x$ qui tend vers $+\infty$, c'est une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

D. La limite de $\ln x$ en 0^+, égale à $-\infty$.

Faux.
Elle donne l'asymptote verticale, l'axe des ordonnées.

Correction

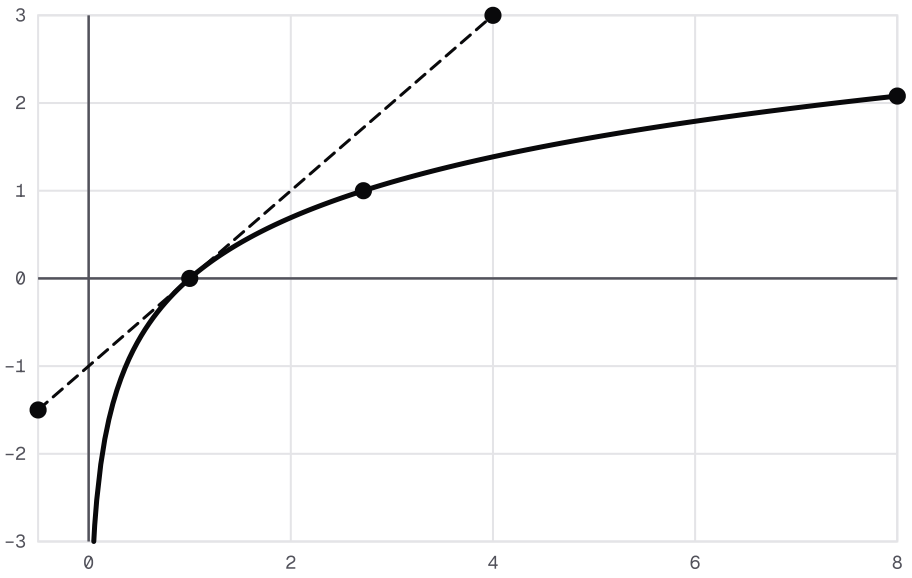
En $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, et $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 d'après les croissances comparées.

Ces deux limites ensemble donnent une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Exemple : placer des points

- $\ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$: la courbe passe par le point $\left(\mathrm{e}^2; 2\right)$, et la calculatrice affiche $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}389$.
- $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$: elle passe par $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}; -1\right)$, et la calculatrice affiche $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$.
- La tangente en 1 a pour équation $y = x - 1$. Au point d'abscisse e, la courbe est à la hauteur 1, et cette tangente à la hauteur $\mathrm{e} - 1 \approx 1{,}718$. Au point d'abscisse e, la courbe est donc sous la tangente en 1, car $1 < \mathrm{e} - 1$.

Voir la courbe, rédiger



La courbe de $\ln$ et sa tangente au point d'abscisse 1

Remarque : Coin examen : rédiger une limite de référence

Voici une rédaction attendue.

« Pour $x \neq 0$ proche de 0, on pose $h = 2x$. Alors $\dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 2 \times \dfrac{\ln(1+h)}{h}$. Lorsque x tend vers 0, h tend vers 0, et $\dfrac{\ln(1+h)}{h}$ tend vers 1, d'après la limite liée au nombre dérivé de $\ln$ en 1. Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 2$. »

La limite de référence est nommée, et le changement de variable est écrit.

Étudier une fonction, puis à toi

Exemple : étudier un coût moyen fictif

Une entreprise fictive estime son coût moyen, en centaines de dirhams par objet, par $M(q) = 2q + 3 - 4\ln q$, où q compte des centaines d'objets.

- **Domaine** : $\ln q$ a un sens pour $q > 0$, donc $D =]0;+\infty[$.
- **En 0^+** : $-4\ln q$ tend vers $+\infty$, donc $\lim_{q\to 0^+} M(q) = +\infty$. L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.
- **En $+\infty$** : pour tout $q > 0$, $M(q) = q\left(2 + \dfrac{3}{q} - 4\times\dfrac{\ln q}{q}\right)$. Comme $\dfrac{\ln q}{q}$ tend vers 0, la parenthèse tend vers 2, donc $\lim_{q\to+\infty} M(q) = +\infty$.
- **Dérivée** : pour tout $q > 0$, $M'(q) = 2 - \dfrac{4}{q} = \dfrac{2(q-2)}{q}$, du signe de $q - 2$.
- **Minimum** : $M(2) = 7 - 4\ln 2$, et la calculatrice affiche $M(2) \approx 4{,}227$. Le coût moyen est minimal pour 200 objets.

Tableau de variations du coût moyen fictif M, pour q strictement positif.

q	0		2		$+\infty$
$M'(q)$	‖	−	0	+	
$M(q)$	$+\infty$‖	↘	$7 - 4\ln 2$	↗	$+\infty$

À toi : Deux limites près de 1 et de 0

Calcule $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{3x-3}$ et $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-4x)}{x}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Fais apparaître l'une des deux limites liées au nombre dérivé de $\ln$ en 1.

Indice 2

$3x - 3 = 3(x-1)$; pour la seconde, pose $h = -4x$.

Indice 3

Point délicat : $\dfrac{\ln(1-4x)}{x} = -4\times\dfrac{\ln(1+h)}{h}$; n'oublie pas le facteur -4.

Réponse

En 1. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$:

$$\frac{\ln x}{3x-3} = \frac{1}{3} \times \frac{\ln x}{x-1}.$$

Quand x tend vers 1, ce produit tend vers $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.

En 0. Pour $x \neq 0$ proche de 0, on pose $h = -4x$. Alors :

$$\frac{\ln(1-4x)}{x} = -4 \times \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

Quand x tend vers 0, h tend vers 0 : la limite est -4.

Dérivée de ln u et primitives de u'/u

Rappel, puis un coût qui contient ln

Rappel. Pour dériver $x \mapsto g\left(u(x)\right)$, on multiplie $u'(x)$ par $g'\left(u(x)\right)$. Par exemple, $x \mapsto (3x+1)^2$ a pour dérivée $x \mapsto 3 \times 2(3x+1)$.

En clair. Dériver $\ln u$, c'est dériver une fonction composée : $\ln$ appliquée à u.

Pourquoi est-ce vrai ? Le rappel s'applique, car $\ln$ est dérivable là où u prend ses valeurs. Pour $\ln|u|$, on distingue selon le signe de u.

Devine : Dériver un logarithme composé

Applique le rappel. Une entreprise fictive modélise un coût par $C(q) = 20 + 6\ln(3q+1)$, pour $q \geq 0$. Quelle est la dérivée de $q \mapsto \ln(3q+1)$ sur $[0;+\infty[$?

A. $q \mapsto \dfrac{1}{3q+1}$

Faux.

Il manque le facteur 3, dérivée de $q \mapsto 3q+1$.

B. $q \mapsto \dfrac{3}{3q+1}$

Juste.

Juste : c'est la dérivée d'une fonction composée.

C. $q \mapsto \ln 3$

Faux.

Ce n'est pas une dérivée : $\ln 3$ est une constante.

D. $q \mapsto \dfrac{3}{q}$

Faux.

Le contenu du logarithme est $3q+1$, pas q.

Correction

D'après la dérivée d'une fonction composée, pour tout $q \geq 0$, la dérivée de $q \mapsto \ln(3q+1)$ vaut en q :

$$3 \times \frac{1}{3q+1} = \frac{3}{3q+1}.$$

Le coût marginal vaut donc $C'(q) = \dfrac{18}{3q+1}$. Il est strictement positif : le coût augmente avec q.

Dérivée de ln u

Théorème : Dérivée de ln u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, la fonction $x \mapsto \ln\left(u(x)\right)$ est dérivable sur I et $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$.
- Si u ne s'annule pas sur I et garde un signe constant ($u > 0$ sur I, ou $u < 0$ sur I), la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $\left(\ln|u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration

Étape 1. Si $u > 0$ sur I : $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, qui contient les valeurs de u. D'après la dérivée d'une fonction composée, $\left(\ln u\right)' = u' \times \dfrac{1}{u} = \dfrac{u'}{u}$.

Étape 2. Si $u < 0$ sur I : $|u| = -u$, qui est dérivable et strictement positive sur I. L'étape 1 appliquée à $-u$ donne $\left(\ln|u|\right)' = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$.

Étape 3. Si $u > 0$ sur I, $|u| = u$ et l'étape 1 s'applique. Dans les deux cas, $\left(\ln|u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La dérivée de $\ln u$ est un cas de la **dérivée d'une fonction composée**. Pour la valeur absolue, on traite deux cas : celui où u est positive est déjà réglé, et l'autre s'y ramène.

Vérifie : Le cas négatif

Dans la preuve, lorsque $u < 0$ sur I, à quelle fonction applique-t-on la dérivée de $\ln u$ déjà établie ?

A. À u^2, qui est strictement positive sur I.
Faux.
La preuve n'emploie pas le carré ; elle utilise $|u| = -u$.

B. À $\dfrac{1}{u}$, qui est définie sur I.
Faux.

$\dfrac{1}{u}$ est strictement négative sur I : son logarithme n'existe pas.

C. À $u+1$, qui reste dérivable sur I.

Faux.

$u+1$ peut être négative ou nulle, et $\ln(u+1)$ n'est pas $\ln|u|$.

D. À $-u$, qui est strictement positive sur I.

Juste.

Juste : $|u| = -u$, et la formule donne $\dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$.

Correction

Si $u < 0$ sur I, alors $|u| = -u$, qui est dérivable et strictement positive sur I.

La dérivée de $\ln u$ s'applique donc à $-u$: $(\ln|u|)' = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple : dériver deux logarithmes

- Pour tout réel x, $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 > 0$. La fonction $x \mapsto \ln\left(x^2+4x+5\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}$.
- Sur $]2;+\infty[$, $2-x<0$. La dérivée de $x \mapsto \ln|2-x|$ y est $x \mapsto \dfrac{-1}{2-x} = \dfrac{1}{x-2}$.
- **L'hypothèse compte.** $x \mapsto \ln(x-3)$ n'est pas définie sur $[0;5]$: on ne la dérive que sur $]3;+\infty[$.

Primitives de u'/u

En clair. La dérivée de $x \mapsto \ln(5x+2)$ est $x \mapsto \dfrac{5}{5x+2}$. Lue à l'envers, cette égalité donne une primitive de $x \mapsto \dfrac{5}{5x+2}$ sur $\left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$.

Pourquoi est-ce vrai ? On lit dans l'autre sens la dérivée de $\ln|u|$.

Propriété : Primitives de u'/u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, qui ne s'annule pas et garde un signe constant sur I. Les primitives sur I de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \ln|u(x)| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Si $u > 0$ sur I, on peut écrire $\ln\left(u(x)\right) + c$.

Démonstration

Étape 1. D'après la dérivée de ln u, la fonction $F : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $F' = \dfrac{u'}{u}$: F est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I.

Étape 2. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante (chapitre des primitives) : toute primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I s'écrit $F + c$, avec c réel ; réciproquement, chaque $F + c$ a pour dérivée $\frac{u'}{u}$.

Étape 3. Si $u > 0$ sur I, $|u(x)| = u(x)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une primitive s'obtient ici en **lisant une dérivée à l'envers**. Un résultat du chapitre des primitives donne ensuite toutes les autres.

Vérifie : Toutes les primitives

Dans la preuve, qu'est-ce qui garantit que toutes les primitives de $\frac{u'}{u}$ sur I s'écrivent $\ln|u| + c$?

A. Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction ont pour différence une constante.

Juste.

Juste : les autres primitives s'obtiennent en ajoutant une constante c.

B. La fonction u est strictement positive sur tout l'intervalle I.

Faux.

La preuve couvre aussi le cas $u < 0$; et le signe ne dit rien des autres primitives.

C. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Faux.

Elle sert à comparer, pas à décrire toutes les primitives.

D. La dérivée d'une constante vaut 1, ce qui ajoute le réel c.

Faux.

La dérivée d'une constante est nulle : c'est pour cela qu'on peut ajouter c.

Correction

D'après la dérivée de $\ln|u|$, la fonction $F : x \mapsto \ln|u(x)|$ est une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I.

Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction ont pour différence une constante : les autres sont les fonctions $F + c$, avec c réel.

Réciproquement, chaque $F + c$ a pour dérivée $\frac{u'}{u}$.

Exemple : deux primitives

- Sur $\mathbb{R}$, $3x^2 + 2 > 0$, et la dérivée de $x \mapsto 3x^2 + 2$ est $x \mapsto 6x$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{6x}{3x^2 + 2}$ est $x \mapsto \ln\left(3x^2 + 2\right)$.

- Sur $]2;+\infty[$, $\dfrac{1}{4x-8} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{4x-8}$, avec $4x-8>0$. Une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln(4x-8)$.
- **L'hypothèse compte.** Sur $[0;3]$, $4x-8$ s'annule en 2 : la formule ne s'applique pas sur cet intervalle.

Étudier une fonction

Méthode : étudier une fonction qui contient un logarithme

1. **Cherche le domaine** : $u(x)>0$ pour $\ln u$, $u(x)\neq 0$ pour $\ln|u|$.
2. **Calcule les limites** aux bornes du domaine, et déduis-en les asymptotes.
3. **Dérive** avec $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, étudie le signe de la dérivée et dresse le tableau de variations.
4. **Trace** la courbe, après avoir placé les tangentes et les points remarquables.

Exemple : un bénéfice fictif

Une entreprise fictive estime son bénéfice, en milliers de dirhams, par $B(q) = 4\ln q - q + 6$, où $q \in [1;10]$ compte des centaines d'objets.

- **Dérivée** : pour tout $q \in [1;10]$, $B'(q) = \dfrac{4}{q} - 1 = \dfrac{4-q}{q}$. Comme $q>0$, son signe est celui de $4-q$.
- **Variations** : B est strictement croissante sur $[1;4]$ et strictement décroissante sur $[4;10]$.
- **Maximum** : $B(4) = 4\ln 4 + 2 = 8\ln 2 + 2$, et la calculatrice affiche $B(4) \approx 7{,}545$. Le bénéfice est maximal pour 400 objets.

Attention : la dérivée de ln u

✗ « La dérivée de $x \mapsto \ln(4x-1)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{4x-1}$. »

✓ Le facteur u' ne s'oublie pas : sur $\left]\dfrac{1}{4};+\infty\right[$, la dérivée est $x \mapsto \dfrac{4}{4x-1}$.

Contrôle par le produit : pour tout $x > \dfrac{1}{4}$, $\ln(4x-1) = \ln 4 + \ln\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$. La dérivée en x vaut donc $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{4x-1}$.

Primitives : méthode et piège

Méthode : chercher une primitive de la forme u'/u

1. **Repère** au dénominateur une fonction u, dérivable et qui ne s'annule pas sur l'intervalle.
2. **Calcule** u' et **compare** au numérateur : s'il vaut $k\,u'$, avec k réel, la fonction s'écrit $k\dfrac{u'}{u}$.
3. **Conclus** : une primitive est $k\ln|u|$, ou $k\ln u$ si $u>0$ sur l'intervalle.

Attention : la valeur absolue

✗ « Sur $\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right[$, une primitive de $x\mapsto\dfrac{2}{2x-7}$ est $x\mapsto\ln(2x-7)$. »

✓ Sur cet intervalle, $2x-7<0$: $\ln(2x-7)$ n'existe pas. Une primitive est $x\mapsto\ln|2x-7|$, c'est-à-dire $x\mapsto\ln(7-2x)$.

Contrôle : la dérivée de $x\mapsto\ln(7-2x)$ vaut en x : $\dfrac{-2}{7-2x}=\dfrac{2}{2x-7}$.

À toi : Une dérivée, puis une primitive

Soit h la fonction $x\mapsto\ln\left(x^2-2x+2\right)$. Justifie que h est définie sur $\mathbb{R}$, calcule $h'(x)$, puis donne une primitive de $x\mapsto\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$ sur $\mathbb{R}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris x^2-2x+2 sous la forme $(x-1)^2+1$.

Indice 2

Applique $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ avec $u'(x)=2x-2$.

Indice 3

Point délicat : le numérateur $x-1$ vaut la moitié de $u'(x)$; un facteur $\dfrac{1}{2}$ apparaît.

Réponse

Ensemble de définition. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&x^2-2x+2\\&=(x-1)^2+1\\&\geq 1.\end{aligned}$$

Le contenu du logarithme est donc strictement positif : h est définie sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. D'après la dérivée de $\ln u$, pour tout réel x :

$$h'(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}.$$

Primitive. Le numérateur $x-1$ vaut $\dfrac{1}{2}(2x-2)$. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\frac{x-1}{x^2-2x+2}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2x-2}{x^2-2x+2}.\end{aligned}$$

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$.

Logarithme de base a et logarithme décimal

Du logarithme décimal à la base a

Rappel de 1re année : le **logarithme décimal**, noté $\log$, vérifie $\log\left(10^n\right) = n$ pour tout entier relatif n. Il transforme lui aussi un produit en somme. Par exemple, $\log 1\,000 = 3$ et $\log 0{,}01 = -2$.

Devine : Un quotient de logarithmes

Sans calculatrice, que vaut $\dfrac{\ln 1\,000}{\ln 10}$?

A. 100, car $\dfrac{1\,000}{10} = 100$

Faux.

On a divisé les nombres, pas leurs logarithmes.

B. $\ln 100$, le logarithme du quotient

Faux.

Un quotient de logarithmes n'est pas le logarithme du quotient.

C. 3, comme $\log 1\,000$

Juste.

Juste : $\ln 1\,000 = 3\ln 10$.

D. On ne peut pas le simplifier

Faux.

$1\,000 = 10^3$: la règle des puissances simplifie ce quotient.

Correction

Comme $1\,000 = 10^3$, on a $\ln 1\,000 = 3\ln 10$, donc $\dfrac{\ln 1\,000}{\ln 10} = 3$.

C'est aussi $\log 1\,000$: diviser $\ln x$ par $\ln 10$ semble redonner le logarithme décimal. Cette idée, étendue à une base a, donne la définition suivante.

Définition : Logarithme de base a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle **fonction logarithme de base** a, notée $\log_a$, la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Le logarithme de base 10 est le **logarithme décimal**, noté $\log$: pour tout $x > 0$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. Le logarithme de base e est le logarithme népérien : $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$.

Exemple : quelques logarithmes de base a

- $\log_2 8 = \dfrac{\ln 8}{\ln 2} = \dfrac{3\ln 2}{\ln 2} = 3.$
- $\log_5\left(\dfrac{1}{25}\right) = \dfrac{-2\ln 5}{\ln 5} = -2.$
- $\log_{0,5} 4 = \dfrac{\ln 4}{\ln 0{,}5} = \dfrac{2\ln 2}{-\ln 2} = -2.$
- La calculatrice affiche $\log_3 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 3} \approx 2{,}096.$

Propriétés du logarithme de base a

En clair. $\log_a$ n'est rien d'autre que $\ln$ divisée par un nombre fixe, $\ln a$.

Pourquoi est-ce vrai ? Diviser une égalité par un même nombre non nul la conserve : les règles de $\ln$ passent donc à $\log_a$.

Propriété : Propriétés du logarithme de base a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, et $\log_a\left(a^n\right) = n$ pour tout entier relatif n ; en particulier $\log\left(10^n\right) = n$.
- Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout entier relatif n : $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a\left(x^n\right) = n\log_a x$.
- $\log_a$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$: elle est strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Démonstration

Étape 1. Comme $a \neq 1$ et $a > 0$, on a $\ln a \neq 0$ (dérivée, sens de variation et signe de ln) : $\log_a$ est le produit de $\ln$ par la constante $\dfrac{1}{\ln a}$.

Étape 2. $\log_a 1 = \dfrac{0}{\ln a} = 0$, $\log_a a = 1$, et $\log_a\left(a^n\right) = \dfrac{n\ln a}{\ln a} = n$ (puissance d'exposant entier) ; avec $a = 10$, $\log\left(10^n\right) = n$.

Étape 3. On divise par $\ln a$ les égalités du logarithme d'un produit et des propriétés de l'inverse, du quotient et de la puissance.

Étape 4. Le produit de $\ln$ par une constante est dérivable : $\log_a'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \times \dfrac{1}{x}$. Si $a > 1$, $\ln a > 0$ et cette dérivée est strictement positive ; si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$ et elle est strictement négative. Donc $\log_a$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ si $a > 1$, strictement décroissante si $0 < a < 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit $\log_a x = \dfrac{1}{\ln a} \times \ln x$: tout vient de $\ln$, **multipliée par une constante**. Les égalités se transmettent. Pour le sens de variation, on regarde le signe de la dérivée $\dfrac{1}{x \ln a}$, donc celui de $\ln a$.

Vérifie : Un dénominateur non nul

Dans la preuve, pourquoi a-t-on $\ln a \neq 0$?

A. Car a est un nombre entier.

Faux.

a peut valoir $0{,}5$: il n'est pas forcément entier.

B. Car $\ln a > 0$ pour tout réel $a > 0$.

Faux.

C'est faux : $\ln 0{,}5 < 0$.

C. Car $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Faux.

La dérivabilité ne dit rien de la valeur $\ln a$.

D. Car $a > 0$ et $a \neq 1$, et $\ln$ ne s'annule qu'en 1.

Juste.

Juste : la stricte croissance donne $\ln a \neq \ln 1 = 0$.

Correction

Comme $a > 0$ et $a \neq 1$, la stricte croissance de $\ln$ donne $\ln a \neq \ln 1$, soit $\ln a \neq 0$.

On peut donc diviser par $\ln a$.

Exemple : calculer et comparer

- $\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 16 = 4$.
- $\log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$.
- La base $0{,}5$ est entre 0 et 1 : $\log_{0{,}5}$ est strictement décroissante. Ainsi, $\log_{0{,}5} 2 = -1$ est plus grand que $\log_{0{,}5} 4 = -2$.
- Pour quel x a-t-on $10^x = 500$? Comme $10^2 = 100$ et $10^3 = 1\,000$, x est entre 2 et 3. La propriété suivante le précise.

Puissances de 10

Propriété : Logarithme décimal et équations du type 10^x = a

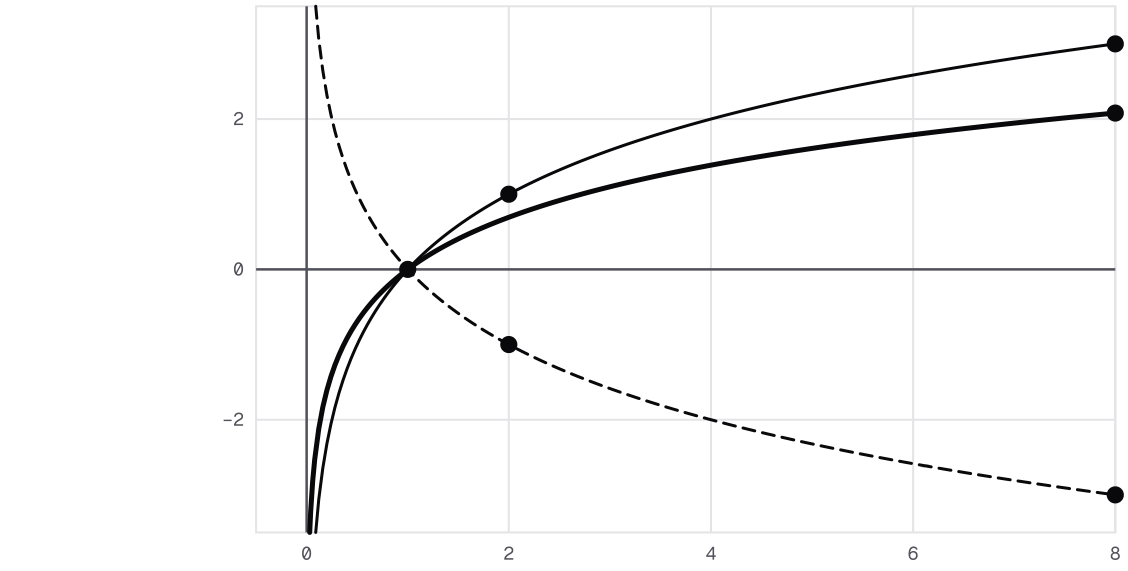
Le logarithme décimal $\log = \log_{10}$ est celui de la classe de 1re année : $\log 10 = 1$ et il transforme un produit en somme. Pour tout réel x et tout réel $a > 0$:

$$10^x = a \Leftrightarrow x = \log a, \qquad 10^x \leq a \Leftrightarrow x \leq \log a, \qquad 10^x \geq a \Leftrightarrow x \geq \log a.$$

Pour $a \leq 0$, l'équation $10^x = a$ n'a aucune solution, car $10^x > 0$.

Remarque

Ce résultat est admis.



Les courbes de $\ln$, de $\log_{2}$ et de $\log_{0{,}5}$

Seuils et puissances

Méthode : trouver un seuil pour une puissance

1. **Isole** la puissance : $q^n \geq a$, avec $q > 0$ et $a > 0$; ou $10^x = a$, avec $a > 0$.
2. **Applique** $\ln$ ou $\log$, qui conservent l'ordre : $n \ln q \geq \ln a$. Pour $10^x = a$, on obtient directement $x = \log a$.
3. **Divise** par $\ln q$ en regardant son signe : le sens est conservé si $q > 1$, inversé si $0 < q < 1$.
4. **Conclus** avec un entier quand la situation l'exige : un nombre d'années, de mois.

Exemple : tripler un capital, une puissance de 10

Un capital qui triple. Le capital fictif de Nadia, placé à 5 pour cent par an, aura-t-il triplé au bout de 20 ans ? On cherche n tel que $1{,}05^n \geq 3$.

Comme $\log$ est strictement croissante, $1{,}05^n \geq 3$ équivaut à $n \log 1{,}05 \geq \log 3$. Or $\log 1{,}05 > 0$, donc :

$$n \geq \frac{\log 3}{\log 1{,}05}.$$

La calculatrice affiche $\dfrac{\log 3}{\log 1{,}05} \approx 22{,}5$: il faut 23 ans, pas 20.

Puissances de 10**.** $10^x = 40$ équivaut à $x = \log 40$, et la calculatrice affiche $\log 40 \approx 1{,}602$. De même, $10^x \leq 0{,}02$ équivaut à $x \leq \log 0{,}02$, soit $x \leq \log 2 - 2$.

Attention : diviser par un logarithme négatif

✗ « Le prix fictif d'un téléphone baisse de 20 pour cent par an. Alors $0{,}8^n \leq 0{,}2$ donne $n \leq \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}8}$. »

✓ Comme $0 < 0{,}8 < 1$, on a $\ln 0{,}8 < 0$: diviser par $\ln 0{,}8$ change le sens. On obtient $n \geq \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}8}$, quotient que la calculatrice affiche environ égal à $7{,}21$.

Le prix tombe sous le cinquième de sa valeur de départ à partir de $n = 8$.

Un seuil rédigé, à toi

Remarque : Coin examen : rédiger un seuil avec log

Un capital fictif est placé à intérêts composés, au taux annuel de 7 pour cent. Voici la rédaction attendue.

« On cherche le plus petit entier n tel que $1{,}07^n \geq 2$. La fonction $\log$ est strictement croissante, donc cette inéquation équivaut à $n \log 1{,}07 \geq \log 2$. Comme $1{,}07 > 1$, $\log 1{,}07 > 0$: on divise sans changer le sens, et $n \geq \dfrac{\log 2}{\log 1{,}07}$. La calculatrice donne $\dfrac{\log 2}{\log 1{,}07} \approx 10{,}24$. Le plus petit entier qui convient est $n = 11$: le capital double au bout de 11 ans. »

La conclusion répond par un nombre entier d'années.

À toi : Une équation, un seuil

Résous $10^x = 250$. Puis trouve le plus petit entier n tel que $0{,}9^n \leq 0{,}5$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour l'équation, utilise le logarithme décimal ; pour le seuil, applique $\ln$ aux deux membres.

Indice 2

Pour l'équation, applique l'équivalence $10^x = a \Leftrightarrow x = \log a$; pour le seuil, tu obtiens $n \ln 0{,}9 \leq \ln 0{,}5$.

Indice 3

Point délicat : $\ln 0{,}9 < 0$, donc diviser par ce nombre change le sens de l'inégalité.

Réponse

Équation. D'après la propriété des puissances de 10, $10^x = 250$ équivaut à $x = \log 250$. La calculatrice affiche $\log 250 \approx 2{,}398$.

Seuil. La fonction $\ln$ est strictement croissante, donc $0{,}9^n \leq 0{,}5$ équivaut à $n \ln 0{,}9 \leq \ln 0{,}5$. Comme $\ln 0{,}9 < 0$, diviser par ce nombre change le sens :

$$n \geq \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}.$$

La calculatrice affiche $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}58$.

Conclusion. Le plus petit entier qui convient est $n = 7$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : la carte du chapitre

- **Définition** : $\ln$ est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1. Elle est strictement croissante.
- **Calcul** : un produit devient une somme, une puissance devient un facteur.
- **Limites** : $-\infty$ en 0^+, $+\infty$ en $+\infty$; x l'emporte sur $\ln x$; près de 1, $\dfrac{\ln x}{x-1}$ tend vers 1.
- **Le nombre** e : $\ln \mathrm{e} = 1$, et la calculatrice affiche $\mathrm{e} \approx 2{,}718$.
- **Dérivée et primitive** : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, et $\ln|u|$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$.
- **Autres bases** : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$; $\log$ est le logarithme décimal.

À retenir : Quelle technique pour quelle question

- **Où une expression a-t-elle un sens ?** Un contenu strictement positif pour chaque logarithme.
- **Équation ou inéquation** : domaine, un seul logarithme par membre, comparaison des contenus, tri.
- **Système** : $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, puis un système du premier degré.
- **Limite indéterminée** : factorisation, croissances comparées, ou nombre dérivé en 1.

- **Étude de fonction** : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, puis signe et tableau de variations.
- **Seuil** $q^n \geq a$: appliquer $\ln$, puis diviser par $\ln q$ en surveillant son signe.

Le mot du prof. Tu as commencé par tâtonner à la calculatrice pour un capital qui double. Tu sais maintenant répondre exactement, en une ligne, avec un logarithme. Garde un réflexe : avant tout calcul, cherche le domaine.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions logarithmiques » (2bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)