BURHAN

Résumé : Fonctions exponentielles

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-exponentielles/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions exponentielles	Semestre 2

L'exponentielle, réciproque du logarithme

À retenir : Une idée : défaire le logarithme

L'exponentielle défait ce que fait le logarithme. Pour tout réel x et tout réel $y > 0$, écrire $y = e^x$ ou $x = \ln y$, c'est dire la même chose.

Garde en tête deux réflexes :

- une exponentielle est toujours strictement positive ;
- on passe d'une écriture à l'autre dans les deux sens.

Définition : Fonction exponentielle népérienne

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$; elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée **fonction exponentielle népérienne** et notée $\exp$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]0;+\infty[$: pour tout réel x et tout réel y strictement positif,

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y.$$

Notation. Pour tout réel x, on écrit $\exp(x) = e^x$, où $e = \exp(1)$ est le nombre tel que $\ln e = 1$ ($e \approx 2{,}718$).

Propriété : Exponentielle et logarithme

Pour tout réel x :

$$e^x > 0 \quad \text{et} \quad \ln\left(e^x\right) = x.$$

Pour tout réel y strictement positif : $e^{\ln y} = y$.

En particulier, $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Exemple

Avec le logarithme. $\ln\left(e^{-6}\right) = -6$ et, pour tout réel x, $\ln\left(e^{x+1}\right) = x + 1$.

Avec l'exponentielle. Le réel $0{,}3$ est strictement positif, donc $e^{\ln 0{,}3} = 0{,}3$.

Sens interdit. L'écriture $e^{\ln(-2)}$ n'a aucun sens : $\ln$ n'est défini que pour un réel strictement positif.

Remarque : Valeurs exactes et valeurs approchées

À la calculatrice, la touche e^x donne $e^1 \approx 2{,}718$ et $e^2 \approx 7{,}389$.

Ces écrans ne sont que des valeurs approchées. Dans un calcul exact, garde l'écriture e^2.

Sens de variation, équations, inéquations

Propriété : Continuité, sens de variation et comparaison

La fonction $x \mapsto e^x$ est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b,$$
$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b,$$
$$e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b.$$

En particulier, $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, et $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Méthode : résoudre une équation exponentielle

1. **Domaine** : note les valeurs interdites éventuelles.
2. **Forme** : isole l'exponentielle pour obtenir $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ ou $e^{u(x)} = k$.
3. **Comparaison** : la stricte croissance donne $u(x) = v(x)$.
4. **Signe de k** : avec $k \leq 0$, aucune solution ; avec $k > 0$, on écrit $u(x) = \ln k$.

Exemple

Deux exponentielles. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{5x+2} = e^{x-6} \\ \Leftrightarrow\ & 5x + 2 = x - 6 \\ \Leftrightarrow\ & x = -2. \end{aligned}$$

Un réel positif. Comme $9 > 0$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} e^{2x} = 9 &\Leftrightarrow 2x = \ln 9 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3, \end{aligned}$$

car $\ln 9 = 2 \ln 3$.

Un réel négatif. L'équation $e^x = -4$ n'a aucune solution, car $e^x > 0$ pour tout réel x.

Méthode : résoudre une inéquation exponentielle

1. **Forme** : ramène l'inéquation à $e^{u(x)} < e^{v(x)}$, ou à une comparaison avec un réel k.
2. **Sens conservé** : l'exponentielle est strictement croissante, donc $e^{u(x)} < e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.
3. **Réel k** : si $k > 0$, remplace k par $e^{\ln k}$; si $k \leq 0$, conclus par le signe de $e^{u(x)}$.
4. **Réponse** : écris l'ensemble des solutions en intervalle.

Exemple

Comparer deux exposants. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} e^{1-x} < e^{2} &\Leftrightarrow 1 - x < 2 \\ &\Leftrightarrow x > -1. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $]-1; +\infty[$.

Comparer à 1. Comme $1 = e^{0}$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} e^{x+3} \geq 1 &\Leftrightarrow x + 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq -3. \end{aligned}$$

Les solutions forment $[-3; +\infty[$.

Attention : Le signe d'une exponentielle

Une exponentielle ne vaut jamais zéro ni un nombre négatif. Ainsi, $e^{3x} = 0$ n'a aucune solution, et $e^{x} + 1 > 0$ est vraie pour tout réel x.

Avant de prendre un logarithme, vérifie le signe du second membre.

Calcul algébrique, second degré et systèmes

Propriété : Propriétés algébriques de l'exponentielle

Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

$$\begin{aligned} e^{a+b} &= e^{a} \times e^{b}, \\ e^{-a} &= \frac{1}{e^{a}}, \\ e^{a-b} &= \frac{e^{a}}{e^{b}}, \\ \left(e^{a}\right)^{n} &= e^{na}. \end{aligned}$$

Exemple

Un logarithme en exposant.

$$\begin{aligned} e^{2\ln 5} &= \left(e^{\ln 5}\right)^{2} \\ &= 5^{2} = 25. \end{aligned}$$

Une seule exponentielle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(e^x)^3\, e^{-2x} &= e^{3x}e^{-2x}\\ &= e^x.\end{aligned}$$

Attention : Une somme d'exponentielles reste une somme

Un produit d'exponentielles s'écrit avec une somme d'exposants : $e^a \times e^b = e^{a+b}$.

Une somme d'exponentielles, elle, ne se simplifie pas. Par exemple, $e^{1+1} = e^2 \approx 7{,}39$, alors que $e + e = 2e \approx 5{,}44$.

Ne transforme donc pas $e^x + e^y$ en e^{x+y}.

Méthode : une équation du second degré en e^x

1. **Repère** le carré caché : $e^{2x} = (e^x)^2$.
2. **Change d'inconnue** : $X = e^x$, en notant que $X > 0$.
3. **Résous** l'équation du second degré en X avec le discriminant.
4. **Trie** : rejette toute racine négative ou nulle ; pour les autres, $x = \ln X$.

Exemple

Équation. On résout $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$. Avec $X = e^x$, elle devient $X^2 - 3X + 2 = 0$.

Racines. Le discriminant vaut $9 - 8 = 1$, d'où $X = 1$ ou $X = 2$. Les deux sont strictement positives.

Retour à x. $e^x = 1$ donne $x = 0$, et $e^x = 2$ donne $x = \ln 2$. Les solutions sont 0 et $\ln 2$.

Méthode : un système exponentiel

1. **Deux inconnues auxiliaires** : $X = e^x$ et $Y = e^y$, toutes deux strictement positives.
2. **Traduis** : $e^{x+y} = XY$ et $e^{x-y} = \dfrac{X}{Y}$.
3. **Résous** le système en X et Y, par substitution ou par combinaison.
4. **Contrôle** les signes de X et Y, puis prends les logarithmes.

Exemple

Système. $e^x + e^y = 4$ et $e^x - e^y = 2$.

En X et Y. On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$: on obtient $X + Y = 4$ et $X - Y = 2$. En additionnant, $2X = 6$, donc $X = 3$, puis $Y = 1$.

Conclusion. Les deux valeurs sont strictement positives : $x = \ln 3$ et $y = \ln 1 = 0$. Le couple solution est $(\ln 3 ; 0)$.

Dérivée et primitives

Propriété : Dérivée de la fonction exponentielle

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$(e^x)' = e^x.$$

Propriété : Dérivée de x ↦ e^(u(x)) et primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout x de I,

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}.$$

Par conséquent, les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + C$, où C est un réel. En particulier, les primitives de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^x + C$.

Exemple

Exposant affine. Avec $u : x \mapsto -4x$, on a $u'(x) = -4$. La dérivée de $x \mapsto e^{-4x}$ est donc $x \mapsto -4e^{-4x}$.

Exposant du second degré. Avec $u : x \mapsto x^2 + x$, on a $u'(x) = 2x + 1$. La dérivée de $x \mapsto e^{x^2+x}$ est donc $x \mapsto (2x + 1)\, e^{x^2+x}$.

Exemple

Forme exacte. La fonction $x \mapsto 5e^{5x}$ s'écrit $u'\, e^u$, avec $u : x \mapsto 5x$. Ses primitives sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{5x} + C$, où C est un réel.

Un facteur à ajuster. Pour $x \mapsto e^{-x}$, on écrit $e^{-x} = -\left(-e^{-x}\right)$: c'est l'opposé de $u'\, e^u$, avec $u : x \mapsto -x$. Ses primitives sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -e^{-x} + C$.

Attention : Ne pas oublier le facteur u'

Dériver e^u sans écrire u' est l'erreur à surveiller : la dérivée de $x \mapsto e^{-4x}$ n'est pas $x \mapsto e^{-4x}$.

Contrôle par le signe. Cette fonction est décroissante, car $x \mapsto -4x$ est décroissante et l'exponentielle est croissante. Par exemple, $e^0 = 1$ et $e^{-4} \approx 0{,}018$.

Sa dérivée doit donc être négative : $x \mapsto e^{-4x}$ n'a pas le signe attendu, $x \mapsto -4e^{-4x}$ a bien le signe attendu.

Limites et croissances comparées

Propriété : Limites de l'exponentielle aux bornes

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de $x \mapsto e^x$ au voisinage de $-\infty$.

Propriété : Croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0.$$

Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

Propriété : Limite de (e^x – 1)/x en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Méthode : calculer une limite

1. **Termes** : écris la limite de chaque morceau.
2. **Forme indéterminée** : en $+\infty$, factorise par le terme qui l'emporte (e^x, ou x^n en faisant apparaître $\frac{e^x}{x^n}$) ; en $-\infty$, développe pour faire apparaître des termes $x^n e^x$.
3. **Référence** : cite la limite utilisée, aux bornes, par croissances comparées ou celle de $\frac{e^x - 1}{x}$ en 0.
4. **Opérations** : termine par une somme, un produit ou un quotient de limites.

Exemple

En $-\infty$. D'après les croissances comparées, $\lim_{x\to-\infty} x^3 e^x = 0$.

En $+\infty$. D'après les croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.

En 0. On pose $X = 4x$. Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\frac{e^{4x}-1}{x} = 4 \times \frac{e^X - 1}{X}.$$

Quand x tend vers 0, X aussi. La limite de $\dfrac{e^X-1}{X}$ en 0 donne alors $\lim_{x\to0} \dfrac{e^{4x}-1}{x} = 4$.

Attention : Une forme indéterminée n'a pas de valeur toute faite

En $+\infty$, $e^x - x^3$ donne $+\infty - (+\infty)$: ce n'est pas 0. Pour tout réel $x \neq 0$, on écrit :

$$e^x - x^3 = x^3\left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right).$$

Les croissances comparées donnent alors $+\infty$. Une forme indéterminée se lève toujours par un calcul, jamais par intuition.

Étudier une fonction avec une exponentielle

Méthode : étudier une fonction comportant e^u

1. **Dérive** : $(e^u)' = u'\,e^u$, avec la règle du produit si besoin.
2. **Mets en facteur** l'exponentielle, toujours strictement positive.
3. **Signe** : celui de la dérivée est celui de l'autre facteur ; nomme l'intervalle à chaque fois.
4. **Tableau** : variations, valeurs aux bornes, limites et asymptotes.

Exemple

Fonction. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2+1)\,e^x$.

Dérivée. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\,e^x \\ &\quad + (x^2+1)\,e^x \\ &= (x+1)^2\,e^x, \end{aligned}$$

car $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

Signe. Comme $e^x > 0$, $h'(x)$ a le signe de $(x+1)^2$: positif sur $\mathbb{R}$, nul seulement en -1.

Variations. La dérivée est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en un point : h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Tangente en un point

La tangente au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = h'(a)(x - a) + h(a).$$

Pour la fonction précédente en $a = 0$: $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$, d'où la tangente d'équation $y = x + 1$.

Exponentielle de base a

Définition : Fonction exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x, on pose

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

La fonction $x \mapsto a^x$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée **fonction exponentielle de base** a. Pour $a = e$, on retrouve e^x car $\ln e = 1$; pour $a = 1$, on a $1^x = 1$ pour tout réel x.

Propriété : Propriétés de la fonction exponentielle de base a

Soit a et b deux réels strictement positifs, et x et y deux réels.

- $a^x > 0$ et $\ln(a^x) = x \ln a$.
- $a^{x+y} = a^x \, a^y$ et $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ et $(ab)^x = a^x \, b^x$.
- La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a^x)' = (\ln a)\, a^x$.
- Si $a > 1$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; si $0 < a < 1$, elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété : Limites de la fonction exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif.

- Si $a > 1$: $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- Si $0 < a < 1$: $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Méthode : travailler avec a^x

1. **Réécris** la puissance : $a^x = e^{x \ln a}$, avec $a > 0$.

2. **Équation** $a^x = b$, pour $b > 0$ et $a \neq 1$: prends le logarithme, $x \ln a = \ln b$.
3. **Inéquation** : en divisant par $\ln a$, regarde son signe. Le sens change si $0 < a < 1$.
4. **Croissance régulière** : une quantité multipliée par $q > 0$ à chaque période vaut $Q_0\, q^t$ après t périodes.

Exemple

Équation. Pour tout réel x :

$$3^x = 7 \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 7$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln 3}.$$

La calculatrice donne $\dfrac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1{,}771$.

Doublement. Une quantité est multipliée par $1{,}1$ à chaque période. Elle double quand $1{,}1^t = 2$, soit $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}1} \approx 7{,}27$ périodes.

Sens. Comme $\ln 1{,}5 > 0$, la fonction $x \mapsto 1{,}5^x$ est strictement croissante. Comme $\ln 0{,}4 < 0$, la fonction $x \mapsto 0{,}4^x$ est strictement décroissante.

Attention **: La variable en exposant ou en base**

Ne confonds pas 3^x et x^3. La première a pour dérivée $(\ln 3)\, 3^x$, la seconde $3x^2$.

En $x = 2$: $(\ln 3) \times 9 \approx 9{,}89$, contre 12.

Et la base doit être strictement positive : $(-3)^x$ n'est pas défini par la formule $a^x = e^{x \ln a}$, car $\ln(-3)$ n'existe pas.

Quelle technique pour quelle question ?

Méthode **: Quelle technique pour quelle question ?**

- **Simplifier** : $\ln\left(e^a\right) = a$ et $e^{\ln b} = b$, pour $b > 0$.
- **Résoudre une équation** : se ramener à $e^u = e^v$, ou à $e^u = k$ avec le signe de k.
- **Résoudre une inéquation** : la stricte croissance conserve le sens.
- **Carré caché** : $X = e^x$, avec $X > 0$.
- **Système** : $X = e^x$ et $Y = e^y$, puis le contrôle des signes.
- **Dériver** : $\left(e^u\right)' = u'\, e^u$; **primitive** de $u'\, e^u$: $e^u + C$.
- **Limite** : bornes, croissances comparées, limite de $\dfrac{e^x - 1}{x}$ en 0.
- **Variations** : mettre l'exponentielle en facteur, étudier le signe de l'autre facteur.

- **Base a** : $a^x = e^{x \ln a}$.

Réciprocité, y > 0

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

Produit

$$e^{a+b} = e^a \, e^b$$

Inverse

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

Quotient

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

Puissance, n entier relatif

$$(e^a)^n = e^{na}$$

Dérivée composée

$$(e^u)' = u' \, e^u$$

Limite en +∞

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Limite en −∞

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Croissances comparées en +∞

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Croissances comparées en −∞

$$\lim_{x \to -\infty} x \, e^x = 0$$

Limite en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Base a, a > 0

$$a^x = e^{x \ln a}$$

À retenir : Rédiger en devoir

Nomme la limite de référence à chaque calcul : « d'après les croissances comparées ». Pour des variations, écris le signe de la dérivée et l'intervalle.

Après un changement d'inconnue $X = e^x$, rejette toute valeur $X \leq 0$. Termine par une phrase qui répond à la question.