BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Niveau examen	5

Exercice 1 — 4 pts

Équation, inéquation et système exponentiels

1. — 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel X, $X^2 - 3X - 4 = (X+1)(X-4)$.

INDICE

Outil : développe le membre de droite.

2. — 1 pts

En déduire que l'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ a pour unique solution $2\ln 2$.

INDICE

Début : pose $X = e^x$ et utilise la question 1. **Point délicat :** X est strictement positif.

3. — 1 pts

Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{1-2x} \geq e^{x-5}$ est $]-\infty ; 2]$.

INDICE

Outil : la stricte croissance de l'exponentielle conserve le sens.

4. — 1,5 pts

Montrer que le système $e^x + 2e^y = 8$ et $3e^x - e^y = 3$ a pour unique solution le couple $(\ln 2 ; \ln 3)$.

INDICE

Début : pose $X = e^x$ et $Y = e^y$. **Ensuite :** tire Y de la seconde équation.

Exercice 2 — 3 pts

Limites et asymptotes d'un quotient d'exponentielles

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^x + 1}{e^x + 1}$, et (C) sa courbe dans un repère.

1. — 1 pts

Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, et interpréter graphiquement ce résultat.

INDICE

Outil : la limite de e^x en $-\infty$.

2. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{3 + e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

INDICE

Début : divise le numérateur et le dénominateur par e^x. **Outil :** e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$.

3. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 2 = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. En déduire que $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x} = \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Début : réduis au même dénominateur. **Point délicat :** fais apparaître $\dfrac{e^x - 1}{x}$.

Exercice 3 — 8 pts

Problème : étude complète d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\,e^{-x}$, et (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. a) — 0,5 pts

Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

INDICE

Outil : les limites de chaque facteur, puis la règle du produit.

1. b) — 1 pts

Vérifier que $f(x) = 2 \times \dfrac{x}{e^{x}} - e^{-x}$, puis montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Début : développe et écris $x\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}}$. **Outil :** les croissances comparées.

2. a) — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (3-2x)\,e^{-x}$.

INDICE

Outil : la dérivée d'un produit, avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$. **Ensuite :** mets e^{-x} en facteur.

2. b) — 1,5 pts

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f. Montrer que le maximum de f vaut $2e^{-1,5}$.

INDICE

Point délicat : $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $3-2x$.

3. — 1 pts

Montrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x - 1$.

INDICE

Outil : l'équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

4. — 1 pts

Montrer que $f(x) = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{1}{2}$, puis que $f(x) > 0$ pour tout $x > \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Outil : une exponentielle ne s'annule jamais ; le signe de $f(x)$ est celui de $2x-1$.

5. — 1 pts

On donne $2e^{-1,5} \approx 0{,}45$. Tracer (T) et (C).

INDICE

Début : place les points d'abscisses 0, $\dfrac{1}{2}$ et $1{,}5$. **Ensuite :** utilise les limites et l'asymptote.

6. 1 pts

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -(2x+1)\,e^{-x}$. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : une primitive de f est une fonction dont la dérivée est f ; dérive F.

Exercice 4 5 pts

Le bénéfice maximal d'une entreprise

Une entreprise fictive fabrique entre 0 et 6 milliers d'objets par mois. Pour x milliers d'objets, son bénéfice mensuel, en milliers de dirhams, est $B(x) = 100\,(x-1)\,e^{-0{,}5x}$, avec $x \in [0;6]$. Les données sont fictives.

1. 1 pts

Montrer que $B(1) = 0$ et que, sur $[0;6]$, $B(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$.

INDICE

Outil : l'exponentielle est strictement positive ; le signe de $B(x)$ est celui de $x - 1$.

2. 1,5 pts

Montrer que, pour tout x de $[0;6]$, $B'(x) = -50\,(x-3)\,e^{-0{,}5x}$.

INDICE

Outil : la dérivée d'un produit, avec $\left(e^{-0{,}5x}\right)' = -0{,}5\,e^{-0{,}5x}$. **Ensuite :** mets $e^{-0{,}5x}$ en facteur.

3. 1,5 pts

Étudier les variations de B sur $[0;6]$. Montrer que le bénéfice maximal vaut $200\,e^{-1{,}5}$ milliers de dirhams.

INDICE

Point délicat : $-50\,e^{-0{,}5x} < 0$, donc $B'(x)$ a le signe contraire de $x - 3$.

4. 1 pts

Montrer que $B(3) \approx 44{,}6$ à $0{,}1$ près, et interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : la calculatrice donne $e^{-1{,}5}$.

Exercice 5 — 4 pts

Une fonction auxiliaire pour étudier une fonction

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - 3x$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x - \dfrac{3}{2}x^2$.

1. — 1 pts

Montrer que $g'(x) = 2e^x - 3$, puis que g est décroissante sur $]-\infty ; \ln 1{,}5]$ et croissante sur $[\ln 1{,}5 ; +\infty[$.

INDICE

Outil : $2e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1{,}5$; utilise la stricte croissance de l'exponentielle.

2. — 1 pts

Montrer que $g(\ln 1{,}5) = 3\,(1 - \ln 1{,}5)$. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout réel x.

INDICE

Début : $e^{\ln 1{,}5} = 1{,}5$. **Point délicat :** compare $\ln 1{,}5$ à $1 = \ln e$.

3. — 0,5 pts

Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout réel x. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : dérive f terme à terme, puis utilise la question 2.

4. — 1,5 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $-1 < \alpha < 0$.

INDICE

Début : calcule $f(-1)$ et $f(0)$; on donne $e^{-1} \approx 0{,}37$. **Outil :** une fonction continue et strictement croissante prend une seule fois chaque valeur comprise entre deux de ses valeurs.