BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Équation, inéquation et système exponentiels

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel X, $X^2 - 3X - 4 = (X+1)(X-4)$.

INDICE

Outil : développe le membre de droite.

CORRIGÉ

Soit X un réel. On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned}&(X+1)(X-4)\\&= X^2 - 4X + X - 4\\&= X^2 - 3X - 4.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel X, $X^2 - 3X - 4 = (X+1)(X-4)$.

2. 1 pts

En déduire que l'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ a pour unique solution $2\ln 2$.

INDICE

Début : pose $X = e^x$ et utilise la question 1. **Point délicat :** X est strictement positif.

CORRIGÉ

Changement d'inconnue. Soit x un réel ; posons $X = e^x$, avec $X > 0$. Comme $e^{2x} = X^2$, la question 1 donne :

$$\begin{aligned}&e^{2x} - 3e^x - 4 = 0\\\Leftrightarrow\ &(X+1)(X-4) = 0.\end{aligned}$$

Tri. $X = -1$ est impossible, car $X = e^x > 0$. Il reste $X = 4$, soit $e^x = 4$, donc $x = \ln 4 = 2\ln 2$.

Conclusion. L'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ a pour unique solution $2\ln 2$.

3. 1 pts

Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{1-2x} \geq e^{x-5}$ est $]-\infty ; 2]$.

INDICE

Outil : la stricte croissance de l'exponentielle conserve le sens.

CORRIGÉ

Comparaison des exposants. Par stricte croissance de l'exponentielle, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&e^{1-2x} \geq e^{x-5}\\\Leftrightarrow\ &1 - 2x \geq x - 5\\\Leftrightarrow\ &-3x \geq -6\\\Leftrightarrow\ &x \leq 2.\end{aligned}$$

À la dernière étape, on divise par -3, strictement négatif : le sens de l'inégalité change.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $e^{1-2x} \geq e^{x-5}$ est $]-\infty ; 2]$.

4. 1,5 pts

Montrer que le système $e^x + 2e^y = 8$ et $3e^x - e^y = 3$ a pour unique solution le couple $(\ln 2; \ln 3)$.

INDICE

Début : pose $X = e^x$ et $Y = e^y$. **Ensuite :** tire Y de la seconde équation.

CORRIGÉ

Système en X et Y. Posons $X = e^x$ et $Y = e^y$, réels strictement positifs. Le système devient $X + 2Y = 8$ et $3X - Y = 3$.

Résolution. La seconde équation donne $Y = 3X - 3$. On remplace dans la première :

$$\begin{aligned} & X + 2(3X - 3) = 8 \\ \Leftrightarrow\ & 7X - 6 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & X = 2. \end{aligned}$$

Puis $Y = 3 \times 2 - 3 = 3$: le système en X et Y a une unique solution.

Retour à x et y. $X = 2 > 0$ et $Y = 3 > 0$ conviennent : $e^x = 2$ et $e^y = 3$ donnent $x = \ln 2$ et $y = \ln 3$.

Conclusion. Le système a pour unique solution le couple $(\ln 2; \ln 3)$.

Exercice 2 — 3 pts

Limites et asymptotes d'un quotient d'exponentielles

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^x + 1}{e^x + 1}$, et (C) sa courbe dans un repère.

1. — 1 pts

Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, et interpréter graphiquement ce résultat.

INDICE

Outil : la limite de e^x en $-\infty$.

CORRIGÉ

Limite de e^x. D'après les limites de l'exponentielle aux bornes, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Limite de f. Le dénominateur tend vers 1, qui n'est pas nul. Par somme et quotient :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0 + 1}{0 + 1} = 1.$$

Conclusion. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$: la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{3+e^{-x}}{1+e^{-x}}$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

INDICE

Début : divise le numérateur et le dénominateur par e^{x}. **Outil :** e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$.

CORRIGÉ

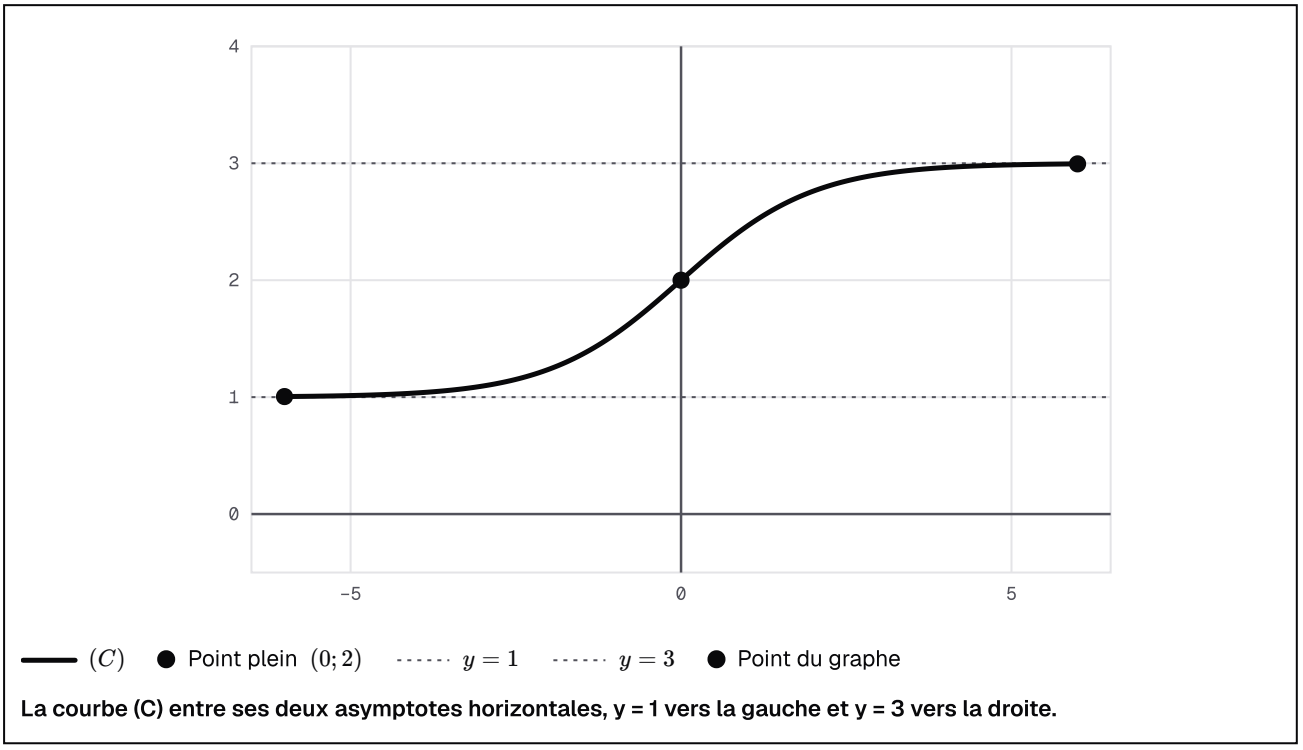
Autre écriture. Soit x un réel. Comme $e^{x} \neq 0$, on divise le numérateur et le dénominateur par e^{x}, avec $\dfrac{1}{e^{x}} = e^{-x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3+\dfrac{1}{e^{x}}}{1+\dfrac{1}{e^{x}}} \\ &= \frac{3+e^{-x}}{1+e^{-x}}. \end{aligned}$$

Limite de e^{-x}. Quand x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$. D'après les limites de l'exponentielle aux bornes, $\lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0$; par la limite d'une fonction composée, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

Limite de f. Par quotient, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3+0}{1+0} = 3$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{3+e^{-x}}{1+e^{-x}}$, et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$: la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.



La courbe (C) entre ses deux asymptotes horizontales, y = 1 vers la gauche et y = 3 vers la droite.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 2 = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. En déduire que $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x} = \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Début : réduis au même dénominateur. **Point délicat :** fais apparaître $\dfrac{e^x - 1}{x}$.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - 2 \\ &= \frac{3e^x + 1 - 2e^x - 2}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \end{aligned}$$

Quotient par x. Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - 2}{x} \\ &= \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{e^x + 1}. \end{aligned}$$

Limites des facteurs. D'après la limite de référence $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, le premier facteur tend vers 1 ; par continuité de l'exponentielle en 0, le second tend vers $\dfrac{1}{e^0 + 1} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) - 2 = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, et, par produit, $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 — 8 pts

Problème : étude complète d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\,e^{-x}$, et (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. a) — 0,5 pts

Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

INDICE

Outil : les limites de chaque facteur, puis la règle du produit.

CORRIGÉ

Limite de $2x-1$. $\lim_{x\to-\infty}(2x-1) = -\infty$.

Limite de e^{-x}. Quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$. D'après les limites de l'exponentielle aux bornes, $\lim_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$; par la limite d'une fonction composée, $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

Conclusion. Par produit, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

1. b) — 1 pts

Vérifier que $f(x) = 2\times\dfrac{x}{e^{x}} - e^{-x}$, puis montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Début : développe et écris $x\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}}$. **Outil :** les croissances comparées.

CORRIGÉ

Autre écriture. Pour tout réel x, $x\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}}$, donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x\,e^{-x} - e^{-x} \\ &= 2\times\frac{x}{e^{x}} - e^{-x}. \end{aligned}$$

Limite. D'après les croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$, donc son inverse $\dfrac{x}{e^{x}}$ tend vers 0. De plus, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, par les limites de l'exponentielle aux bornes et la limite d'une fonction composée. Par produit et différence, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

2. a) 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (3 - 2x)\,e^{-x}$.

INDICE

Outil : la dérivée d'un produit, avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$. **Ensuite :** mets e^{-x} en facteur.

CORRIGÉ

Dérivée d'un produit. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables, et $(e^{-x})' = -e^{-x}$. Pour tout réel x, on dérive puis on met e^{-x} en facteur :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,e^{-x} \\ &\quad + (2x - 1)\left(-e^{-x}\right) \\ &= e^{-x}\,(2 - 2x + 1) \\ &= (3 - 2x)\,e^{-x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = (3 - 2x)\,e^{-x}$.

2. b) 1,5 pts

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f. Montrer que le maximum de f vaut $2e^{-1,5}$.

INDICE

Point délicat : $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $3 - 2x$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $3 - 2x$, qui s'annule en $1{,}5$.

- $f'(x) > 0$ sur $]-\infty ; 1{,}5[$;
- $f'(1{,}5) = 0$;
- $f'(x) < 0$ sur $]1{,}5 ; +\infty[$.

Variations. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty ; 1{,}5]$ et strictement décroissante sur $[1{,}5 ; +\infty[$. Les limites viennent de la question 1.

Maximum. La fonction f atteint donc son maximum en $1{,}5$:

$$\begin{aligned} f(1{,}5) &= (3 - 1)\,e^{-1,5} \\ &= 2e^{-1,5}. \end{aligned}$$

Tableau de variations.

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{-1,5}$	$\searrow$	0

Conclusion. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $2e^{-1,5}$; il est atteint en $1{,}5$.

3. 1 pts

Montrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x - 1$.

INDICE

Outil : l'équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

CORRIGÉ

Valeurs en 0. $f(0) = (0 - 1)\,e^0 = -1$ et, d'après la question 2. a), $f'(0) = (3 - 0)\,e^0 = 3$.

Équation. La tangente (T) a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = 3x - 1$.

Conclusion. La tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x - 1$.

4. 1 pts

Montrer que $f(x) = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{1}{2}$, puis que $f(x) > 0$ pour tout $x > \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Outil : une exponentielle ne s'annule jamais ; le signe de $f(x)$ est celui de $2x - 1$.

CORRIGÉ

Zéro. Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, donc $e^{-x} \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $e^{-x} > 0$, $f(x)$ a le signe de $2x - 1$. Si $x > \dfrac{1}{2}$, alors $2x - 1 > 0$, donc $f(x) > 0$.

Conclusion. $f(x) = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{1}{2}$, et $f(x) > 0$ pour tout $x > \dfrac{1}{2}$.

5. 1 pts

On donne $2e^{-1,5} \approx 0,45$. Tracer (T) et (C).

INDICE

Début : place les points d'abscisses 0, $\dfrac{1}{2}$ et $1,5$. **Ensuite :** utilise les limites et l'asymptote.

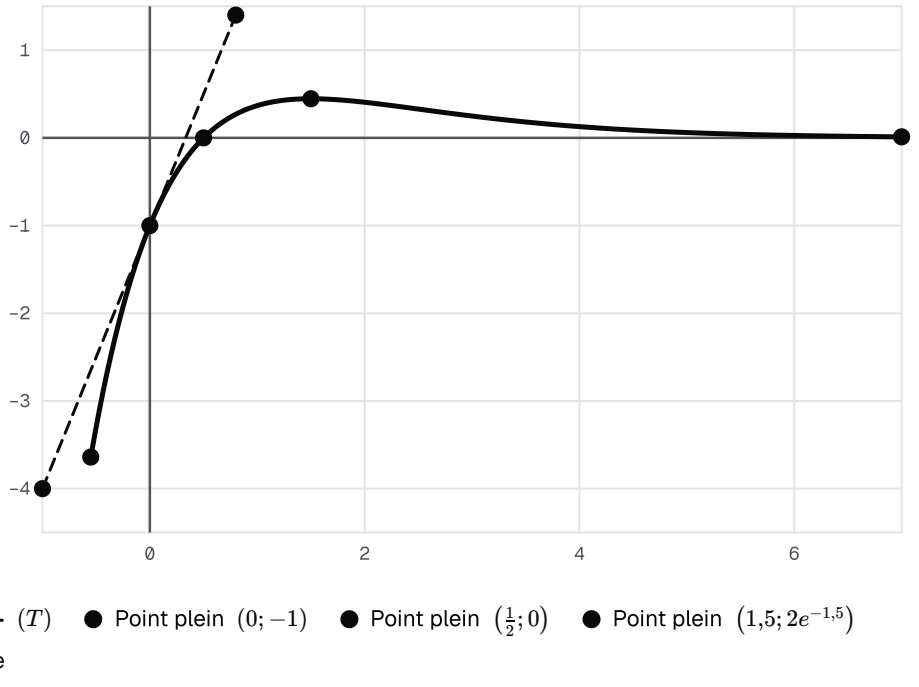
CORRIGÉ

Points utiles.

- (C) passe par le point $(0;-1)$, où elle est tangente à la droite (T), de pente 3.
- (C) coupe l'axe des abscisses au point $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.
- Son maximum est atteint au point $\left(1,5;2e^{-1,5}\right)$, soit environ $(1,5;0,45)$.

Tracé de (T). La droite (T) passe par les points $(0;-1)$ et $(1;2)$.

Allure de (C). Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers $-\infty$: (C) monte jusqu'au maximum, puis redescend vers l'axe des abscisses par valeurs positives. Cet axe est son asymptote au voisinage de $+\infty$.



Tracé de (C) et de sa tangente (T) : la courbe coupe l'axe en 1/2 et atteint son maximum en 1,5.

6. 1 pts

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -(2x+1)\,e^{-x}$. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : une primitive de f est une fonction dont la dérivée est f ; dérive F.

CORRIGÉ

Dérivée de F. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2\,e^{-x} \\ &\quad - (2x+1)\left(-e^{-x}\right) \\ &= e^{-x}\left(-2 + 2x + 1\right) \\ &= (2x-1)\,e^{-x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$: F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 5 pts

Le bénéfice maximal d'une entreprise

Une entreprise fictive fabrique entre 0 et 6 milliers d'objets par mois. Pour x milliers d'objets, son bénéfice mensuel, en milliers de dirhams, est $B(x) = 100\,(x-1)\,e^{-0{,}5x}$, avec $x \in [0;6]$. Les données sont fictives.

1. 1 pts

Montrer que $B(1) = 0$ et que, sur $[0;6]$, $B(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$.

INDICE

Outil : l'exponentielle est strictement positive ; le signe de $B(x)$ est celui de $x - 1$.

CORRIGÉ

Valeur en 1. $B(1) = 100 \times 0 \times e^{-0{,}5} = 0$.

Signe. Pour tout $x \in [0;6]$, $100\,e^{-0{,}5x} > 0$: $B(x)$ a le signe de $x - 1$.

Conclusion. $B(1) = 0$ et, sur $[0;6]$, $B(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$: l'entreprise est bénéficiaire au-delà de 1 millier d'objets.

2. 1,5 pts

Montrer que, pour tout x de $[0;6]$, $B'(x) = -50\,(x-3)\,e^{-0{,}5x}$.

INDICE

Outil : la dérivée d'un produit, avec $\left(e^{-0{,}5x}\right)' = -0{,}5\,e^{-0{,}5x}$. **Ensuite :** mets $e^{-0{,}5x}$ en facteur.

CORRIGÉ

Dérivée d'un produit. D'après la dérivée de e^{u}, $\left(e^{-0{,}5x}\right)' = -0{,}5\,e^{-0{,}5x}$. Pour tout $x \in [0;6]$, on dérive puis on met $e^{-0{,}5x}$ en facteur :

$$\begin{aligned} B'(x) &= 100\,e^{-0{,}5x} \\ &\quad - 50\,(x-1)\,e^{-0{,}5x} \\ &= (150 - 50x)\,e^{-0{,}5x} \\ &= -50\,(x-3)\,e^{-0{,}5x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $[0;6]$, $B'(x) = -50\,(x-3)\,e^{-0{,}5x}$.

3. 1,5 pts

Étudier les variations de B sur $[0;6]$. Montrer que le bénéfice maximal vaut $200\,e^{-1,5}$ milliers de dirhams.

INDICE

Point délicat : $-50\,e^{-0,5x} < 0$, donc $B'(x)$ a le signe contraire de $x-3$.

CORRIGÉ

Signe de $B'(x)$. Pour tout $x \in [0;6]$, $-50\,e^{-0,5x} < 0$: $B'(x)$ a le signe contraire de $x-3$. Donc $B'(x) > 0$ sur $[0;3[$, $B'(3) = 0$ et $B'(x) < 0$ sur $]3;6]$.

Variations. La fonction B est strictement croissante sur $[0;3]$ et strictement décroissante sur $[3;6]$.

Maximum. Le maximum de B sur $[0;6]$ est donc atteint en $x = 3$:

$$\begin{aligned} B(3) &= 100 \times 2 \times e^{-1,5} \\ &= 200\,e^{-1,5}. \end{aligned}$$

Conclusion. B est croissante sur $[0;3]$ puis décroissante sur $[3;6]$; le bénéfice maximal vaut $200\,e^{-1,5}$ milliers de dirhams, pour 3 milliers d'objets.

4. 1 pts

Montrer que $B(3) \approx 44{,}6$ à $0{,}1$ près, et interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : la calculatrice donne $e^{-1,5}$.

CORRIGÉ

Valeur approchée. À la calculatrice, $e^{-1,5} \approx 0{,}2231$, donc $B(3) = 200\,e^{-1,5} \approx 44{,}6$ à $0{,}1$ près.

Conclusion. $B(3) \approx 44{,}6$: en fabriquant 3 milliers d'objets par mois, l'entreprise réalise son bénéfice maximal, environ $44{,}6$ milliers de dirhams, soit près de $44\,600$ dirhams.

Exercice 5 — 4 pts

Une fonction auxiliaire pour étudier une fonction

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - 3x$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x - \dfrac{3}{2}x^2$.

1. — 1 pts

Montrer que $g'(x) = 2e^x - 3$, puis que g est décroissante sur $]-\infty ; \ln 1{,}5]$ et croissante sur $[\ln 1{,}5 ; +\infty[$.

INDICE

Outil : $2e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1{,}5$; utilise la stricte croissance de l'exponentielle.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x) = 2e^x - 3$.

Signe de $g'(x)$. Comme $1{,}5 = e^{\ln 1{,}5}$, la stricte croissance de l'exponentielle donne, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & 2e^x - 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^x \geq 1{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & e^x \geq e^{\ln 1{,}5} \\ \Leftrightarrow\ & x \geq \ln 1{,}5. \end{aligned}$$

De même, $g'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \leq \ln 1{,}5$.

Conclusion. Pour tout réel x, $g'(x) = 2e^x - 3$. Sur $]-\infty ; \ln 1{,}5]$, $g'(x) \leq 0$: g y est décroissante. Sur $[\ln 1{,}5 ; +\infty[$, $g'(x) \geq 0$: g y est croissante.

2. — 1 pts

Montrer que $g(\ln 1{,}5) = 3\,(1 - \ln 1{,}5)$. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout réel x.

INDICE

Début : $e^{\ln 1{,}5} = 1{,}5$. **Point délicat :** compare $\ln 1{,}5$ à $1 = \ln e$.

CORRIGÉ

Valeur. Comme $e^{\ln 1{,}5} = 1{,}5$:

$$\begin{aligned} & g(\ln 1{,}5) \\ & = 2 \times 1{,}5 - 3 \ln 1{,}5 \\ & = 3\,(1 - \ln 1{,}5)\,. \end{aligned}$$

Minimum. D'après la question 1, g est décroissante sur $]-\infty ; \ln 1{,}5]$ puis croissante sur $[\ln 1{,}5 ; +\infty[$: $g(\ln 1{,}5)$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$.

Signe du minimum. Comme $1{,}5 < e$, la stricte croissance du logarithme donne $\ln 1{,}5 < \ln e = 1$. Donc $1 - \ln 1{,}5 > 0$, et $g(\ln 1{,}5) > 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $g(x) \geq g(\ln 1{,}5) > 0$: la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3. 0,5 pts

Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout réel x. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : dérive f terme à terme, puis utilise la question 2.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^x - \frac{3}{2} \times 2x \\ &= 2e^x - 3x \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Variations. D'après la question 2, $f'(x) = g(x) > 0$ pour tout réel x.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. 1,5 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $-1 < \alpha < 0$.

INDICE

Début : calcule $f(-1)$ et $f(0)$; on donne $e^{-1} \approx 0{,}37$. **Outil :** une fonction continue et strictement croissante prend une seule fois chaque valeur comprise entre deux de ses valeurs.

CORRIGÉ

Valeurs en -1 et en 0. $f(0) = 2e^0 - 0 = 2 > 0$. Avec $e^{-1} \approx 0{,}37$, $f(-1) = 2e^{-1} - \frac{3}{2} \approx -0{,}76$. Exactement : comme $e > 2$, $e^{-1} < \frac{1}{2}$, donc $f(-1) < 1 - \frac{3}{2} < 0$.

Solution dans $]-1;0[$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $[-1;0]$. Elle y est strictement croissante d'après la question 3, et 0 est compris entre $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à cette fonction continue et strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $]-1;0[$.

Unicité sur $\mathbb{R}$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle prend la valeur 0 au plus une fois, donc seulement en α.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $-1 < \alpha < 0$.