BURHAN

# Fonctions exponentielles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
|---|---|---|
| Fonctions exponentielles | Entraînement | 7 |

## Exercice 1

## Trois équations qui cachent un second degré

### 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 7e^{x} + 3 = 0$.

INDICE

**Début :** pose $X = e^{x}$ et écris l'équation en $X$. **Point délicat :** garde seulement les racines strictement positives.

### 2.

Résoudre $e^{2x} + 2e^{x} - 8 = 0$.

INDICE

**Outil :** même changement d'inconnue. **Point délicat :** une des racines en $X$ est à rejeter.

### 3.

Résoudre $e^{x} - 6e^{-x} = 1$.

INDICE

**Début :** multiplie les deux membres par $e^{x}$, qui n'est pas nul. **Ensuite :** reviens à la méthode des questions précédentes.

### Exercice 2

## Trois systèmes exponentiels

**1.**

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $e^x + e^y = 5$ et $2e^x - 3e^y = 5$.

INDICE

**Début :** pose $X = e^x$ et $Y = e^y$. **Ensuite :** tire $X$ de la première équation et remplace dans la seconde.

**2.**

Résoudre le système : $e^x + e^y = 7$ et $e^{x+y} = 12$.

INDICE

**Outil :** pose $X = e^x$ et $Y = e^y$ ; alors $e^{x+y} = XY$. **Point délicat :** exprime $Y$ en fonction de $X$ avec la première équation, puis remplace dans la seconde.

**3.**

Résoudre le système : $x - y = \ln 2$ et $e^x + e^y = 9$.

INDICE

**Début :** la première équation donne $e^{x-y} = 2$, donc $X = 2Y$.

### Exercice 3

## Une inéquation qui se ramène à un trinôme

On considère l'expression $A(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$, définie pour tout réel $x$.

**1.**

Vérifier que, pour tout réel $X$, $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$.

INDICE

**Outil :** développe le produit.

**2.**

En posant $X = e^x$, résoudre l'inéquation $A(x) < 0$.

INDICE

**Début :** le trinôme est strictement négatif entre ses racines. **Ensuite :** traduis $1 < e^x < 3$ en encadrement de $x$.

**3.**

En déduire l'ensemble des solutions de $A(x) \geq 0$.

INDICE

**Outil :** $A(x) \geq 0$ est exactement le contraire de $A(x) < 0$.

### Exercice 4

## Lever des formes indéterminées

**1.**

Calculer $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3x)$.

INDICE

**Début :** la forme est du type $+\infty - (+\infty)$. **Outil :** pour $x > 0$, mets $x$ en facteur.

**2.**

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 4}$.

INDICE

**Début :** divise le numérateur et le dénominateur par $e^x$. **Outil :** $e^{-x}$ tend vers $0$ en $+\infty$.

**3.**

Calculer $\lim_{x \to -\infty} (x + 1)\, e^x$.

INDICE

**Début :** la forme est du type $(-\infty) \times 0$ ; développe. **Outil :** les croissances comparées.

**4.**

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$.

INDICE

**Début :** pose $X = 2x$. **Outil :** la limite de $\dfrac{e^X - 1}{X}$ en $0$.

### Exercice 5

## Les variations d'un produit avec une exponentielle

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 8)\,e^x$.

**1.**

Vérifier que, pour tout réel $x$, $f'(x) = (x+4)(x-2)\,e^x$.

INDICE

**Outil :** la dérivée d'un produit. **Ensuite :** factorise le trinôme obtenu.

**2.**

Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de $f$, avec les valeurs exactes de $f(-4)$ et $f(2)$.

INDICE

**Point délicat :** $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe du trinôme $(x+4)(x-2)$.

**3.**

Calculer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

**Début :** en $-\infty$, développe $f(x) = x^2e^x - 8e^x$. **Outil :** les croissances comparées.

### Exercice 6

## La montée en production d'une usine

Une usine fictive lance un nouveau produit. Sa production mensuelle, en milliers d'unités, est modélisée par $P(t) = 40 - 30\,e^{-0{,}2t}$, où $t \geq 0$ est le nombre de mois écoulés. Les données sont fictives.

**1.**

Calculer $P(0)$. Montrer que $P$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

INDICE

**Outil :** la dérivée de $e^u$ avec $u(t) = -0{,}2t$.

**2.**

Calculer la limite de $P(t)$ quand $t$ tend vers $+\infty$, et l'interpréter.

INDICE

**Outil :** $-0{,}2t$ tend vers $-\infty$ ; utilise la limite de l'exponentielle en $-\infty$, puis la limite d'une fonction composée.

**3.**

Déterminer à partir de quel nombre entier de mois la production atteint au moins $35$ milliers d'unités.

INDICE

**Début :** isole l'exponentielle : $e^{-0{,}2t} \leq \dfrac{1}{6}$. **Point délicat :** à la fin, divise par $-0{,}2$.

**4.**

Déterminer une primitive de $t \mapsto e^{-0{,}2t}$ sur $[0;+\infty[$, puis une primitive de $P$ sur cet intervalle.

INDICE

**Outil :** avec $u(t) = -0{,}2t$, on a $u'(t) = -0{,}2$ ; écris $e^{-0{,}2t} = -5 \times \left(-0{,}2\,e^{-0{,}2t}\right)$.

### Exercice 7

## La valeur d'une machine qui baisse d'une année à l'autre

Une entreprise fictive achète une machine $50\,000$ dirhams. D'une année à l'autre, la valeur de la machine est multipliée par $0{,}8$. On note $V(t)$ sa valeur, en dirhams, après $t$ années : $V(t) = 50\,000 \times 0{,}8^t$. Les données sont fictives.

**1.**

Calculer $V(1)$ et $V(2)$. Écrire $V(t)$ sous la forme $50\,000\,e^{kt}$, avec $k$ réel.

INDICE

**Outil :** $a^t = e^{t\ln a}$.

**2.**

Justifier que $V$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, puis calculer la limite de $V(t)$ quand $t$ tend vers $+\infty$.

INDICE

**Point délicat :** le signe de $\ln 0{,}8$. **Outil :** les limites d'une exponentielle de base comprise entre $0$ et $1$.

**3.**

Au bout de combien d'années entières la valeur de la machine devient-elle inférieure à $20\,000$ dirhams ?

INDICE

**Début :** écris $0{,}8^t < 0{,}4$, puis prends le logarithme. **Point délicat :** le sens change en divisant par $\ln 0{,}8$.