BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Entraînement	7

Exercice 1

Trois équations qui cachent un second degré

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 7e^{x} + 3 = 0$.

INDICE

Début : pose $X = e^{x}$ et écris l'équation en X. **Point délicat :** garde seulement les racines strictement positives.

CORRIGÉ

Changement d'inconnue. Soit x un réel ; posons $X = e^{x}$, avec $X > 0$. Comme $e^{2x} = \left(e^{x}\right)^{2} = X^{2}$, l'équation devient :

$$2X^{2} - 7X + 3 = 0.$$

Discriminant. $\Delta = (-7)^{2} - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25$, donc :

$$X_{1} = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2},$$
$$X_{2} = \frac{7 + 5}{4} = 3.$$

Retour à x. Les deux valeurs sont strictement positives.

- $e^{x} = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$.
- $e^{x} = 3$ équivaut à $x = \ln 3$.

Conclusion. L'équation a deux solutions, $-\ln 2$ et $\ln 3$.

2.

Résoudre $e^{2x} + 2e^{x} - 8 = 0$.

INDICE

Outil : même changement d'inconnue. **Point délicat :** une des racines en X est à rejeter.

CORRIGÉ

Équation en X. Avec $X = e^{x} > 0$, l'équation devient $X^{2} + 2X - 8 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 + 32 = 36$, d'où :

$$X_{1} = \frac{-2 - 6}{2} = -4,$$
$$X_{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2.$$

Tri des racines. Comme $X = e^{x} > 0$, la racine -4 est rejetée. Il reste $e^{x} = 2$, soit $x = \ln 2$.

Conclusion. L'équation a pour unique solution $x = \ln 2$.

3.

Résoudre $e^{x} - 6e^{-x} = 1$.

INDICE

Début : multiplie les deux membres par e^{x}, qui n'est pas nul. **Ensuite :** reviens à la méthode des questions précédentes.

CORRIGÉ

Multiplication par e^{x}. Soit x un réel. On multiplie les deux membres par le réel non nul e^{x} : on obtient une équation équivalente. Comme $e^{x} \times e^{-x} = 1$:

$$\begin{aligned} & e^{x} - 6e^{-x} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} - 6 = e^{x} \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} - e^{x} - 6 = 0. \end{aligned}$$

Équation en X. Avec $X = e^{x} > 0$, on obtient $X^{2} - X - 6 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$. Ses racines sont $X = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $X = \dfrac{1+5}{2} = 3$.

Conclusion. La racine -2, négative, est rejetée. Donc $e^{x} = 3$: l'unique solution est $\ln 3$.

Exercice 2

Trois systèmes exponentiels

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $e^x + e^y = 5$ et $2e^x - 3e^y = 5$.

INDICE

Début : pose $X = e^x$ et $Y = e^y$. **Ensuite :** tire X de la première équation et remplace dans la seconde.

CORRIGÉ

Système en X et Y. Posons $X = e^x$ et $Y = e^y$, deux réels strictement positifs. Le système devient $X + Y = 5$ et $2X - 3Y = 5$.

Résolution. La première équation donne $X = 5 - Y$. On remplace dans la seconde :

$$\begin{aligned} & 2(5 - Y) - 3Y = 5 \\ \Leftrightarrow\ & 10 - 5Y = 5 \\ \Leftrightarrow\ & Y = 1. \end{aligned}$$

Puis $X = 5 - 1 = 4$.

Retour à x et y. $X = 4 > 0$ et $Y = 1 > 0$ conviennent : $e^x = 4$ donne $x = \ln 4 = 2\ln 2$, et $e^y = 1$ donne $y = 0$.

Conclusion. Le système a pour unique solution le couple $(2\ln 2 ; 0)$.

2.

Résoudre le système : $e^x + e^y = 7$ et $e^{x+y} = 12$.

INDICE

Outil : pose $X = e^x$ et $Y = e^y$; alors $e^{x+y} = XY$. **Point délicat :** exprime Y en fonction de X avec la première équation, puis remplace dans la seconde.

CORRIGÉ

Système en X et Y. Posons $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$. Comme $e^{x+y} = e^x \times e^y = XY$, le système devient $X + Y = 7$ et $XY = 12$.

Substitution. La première équation donne $Y = 7 - X$. La seconde devient $X(7 - X) = 12$, c'est-à-dire $X^2 - 7X + 12 = 0$.

Racines. $\Delta = 49 - 48 = 1$, d'où $X = \dfrac{7-1}{2} = 3$ ou $X = \dfrac{7+1}{2} = 4$.

- Si $X = 3$, alors $Y = 7 - 3 = 4$.
- Si $X = 4$, alors $Y = 7 - 4 = 3$.

Retour à x et y. Toutes ces valeurs sont strictement positives ; on revient à $x = \ln X$ et $y = \ln Y$.

Conclusion. Le système a deux couples solutions : $(\ln 3 ; \ln 4)$ et $(\ln 4 ; \ln 3)$.

3.

Résoudre le système : $x - y = \ln 2$ et $e^x + e^y = 9$.

INDICE

Début : la première équation donne $e^{x-y} = 2$, donc $X = 2Y$.

CORRIGÉ

Première équation. Posons $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$. L'égalité $x - y = \ln 2$ équivaut à $e^{x-y} = 2$, c'est-à-dire $\dfrac{X}{Y} = 2$, soit $X = 2Y$.

Substitution. La seconde équation, $X + Y = 9$, devient $2Y + Y = 9$. Donc $Y = 3$, puis $X = 6$: ces valeurs sont strictement positives.

Vérification. Avec $x = \ln 6$ et $y = \ln 3$: $\ln 6 - \ln 3 = \ln\left(\dfrac{6}{3}\right) = \ln 2$, et $e^x + e^y = 6 + 3 = 9$.

Conclusion. Le système a pour unique solution le couple $(\ln 6 ; \ln 3)$.

Exercice 3

Une inéquation qui se ramène à un trinôme

On considère l'expression $A(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 3$, définie pour tout réel x.

1.

Vérifier que, pour tout réel X, $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$.

INDICE

Outil : développe le produit.

CORRIGÉ

Soit X un réel. On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned}&(X - 1)(X - 3)\\ &= X^2 - 3X - X + 3\\ &= X^2 - 4X + 3.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel X, $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$.

2.

En posant $X = e^{x}$, résoudre l'inéquation $A(x) < 0$.

INDICE

Début : le trinôme est strictement négatif entre ses racines. **Ensuite :** traduis $1 < e^{x} < 3$ en encadrement de x.

CORRIGÉ

Signe en X. Soit x un réel et $X = e^{x}$. D'après la question 1, $A(x) = (X - 1)(X - 3)$. Ce trinôme, de coefficient de X^2 égal à $1 > 0$, est strictement négatif entre ses racines 1 et 3, donc :

$$A(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < X < 3.$$

Retour à x. Comme $1 = e^{0}$ et $3 = e^{\ln 3}$, la stricte croissance de l'exponentielle donne :

$$\begin{aligned}&1 < e^{x} < 3\\ \Leftrightarrow\ &0 < x < \ln 3.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de $A(x) < 0$ est $]0 ; \ln 3[$.

3.

En déduire l'ensemble des solutions de $A(x) \geq 0$.

INDICE

Outil : $A(x) \geq 0$ est exactement le contraire de $A(x) < 0$.

CORRIGÉ

Complémentaire. Pour tout réel x, l'inégalité $A(x) \geq 0$ est vraie exactement quand $A(x) < 0$ est fausse. Les solutions de $A(x) \geq 0$ sont donc les réels qui n'appartiennent pas à $]0; \ln 3[$.

Contrôle des bornes. $A(0) = 1 - 4 + 3 = 0$ et $A(\ln 3) = 9 - 12 + 3 = 0$: les réels 0 et $\ln 3$ sont bien solutions.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $A(x) \geq 0$ est $]-\infty; 0] \cup [\ln 3; +\infty[$.

Exercice 4

Lever des formes indéterminées

1.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}(e^x-3x)$.

INDICE

Début : la forme est du type $+\infty-(+\infty)$. **Outil :** pour $x>0$, mets x en facteur.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. En $+\infty$, e^x et $3x$ tendent tous deux vers $+\infty$: la différence est une forme indéterminée.

Factorisation. Pour tout réel $x>0$:

$$e^x-3x=x\left(\frac{e^x}{x}-3\right).$$

Limite. D'après les croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$: la parenthèse tend vers $+\infty$. Le facteur x tend aussi vers $+\infty$.

Conclusion. Par produit, $\lim_{x\to+\infty}(e^x-3x)=+\infty$.

2.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-1}{e^x+4}$.

INDICE

Début : divise le numérateur et le dénominateur par e^x. **Outil :** e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout réel x, on divise le numérateur et le dénominateur par $e^x\neq0$, avec $\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}$:

$$\frac{2e^x-1}{e^x+4}=\frac{2-e^{-x}}{1+4e^{-x}}.$$

Limite de e^{-x}. Quand x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$. D'après les limites de l'exponentielle aux bornes, $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$; par la limite d'une fonction composée, e^{-x} tend vers 0.

Conclusion. Par quotient, la limite cherchée vaut $\dfrac{2}{1}=2$.

3.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} (x+1)\, e^{x}$.

INDICE

Début : la forme est du type $(-\infty) \times 0$; développe. **Outil :** les croissances comparées.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x, $(x+1)\, e^{x} = x\, e^{x} + e^{x}$.

Limites des deux termes. D'après les croissances comparées, $\lim_{x \to -\infty} x\, e^{x} = 0$; d'après les limites de l'exponentielle aux bornes, $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.

Conclusion. Par somme, $\lim_{x \to -\infty} (x+1)\, e^{x} = 0$.

4.

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$.

INDICE

Début : pose $X = 2x$. **Outil :** la limite de $\dfrac{e^{X} - 1}{X}$ en 0.

CORRIGÉ

Changement de variable. Pour tout réel $x \neq 0$, posons $X = 2x$:

$$\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \frac{e^{X} - 1}{X}.$$

Limite. Quand x tend vers 0, X tend vers 0, et $\lim_{X \to 0} \dfrac{e^{X} - 1}{X} = 1$. Par la limite d'une fonction composée puis par produit, la limite cherchée vaut $2 \times 1 = 2$.

Conclusion. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = 2$.

Exercice 5

Les variations d'un produit avec une exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 8)\,e^x$.

1.

Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+4)(x-2)\,e^x$.

INDICE

Outil : la dérivée d'un produit. **Ensuite :** factorise le trinôme obtenu.

CORRIGÉ

Dérivée d'un produit. La fonction f est le produit de $x \mapsto x^2 - 8$, de dérivée $x \mapsto 2x$, et de l'exponentielle : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\,e^x \\ &\quad + (x^2 - 8)\,e^x \\ &= (x^2 + 2x - 8)\,e^x. \end{aligned}$$

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &(x+4)(x-2) \\ &= x^2 - 2x + 4x - 8 \\ &= x^2 + 2x - 8. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = (x+4)(x-2)\,e^x$.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f, avec les valeurs exactes de $f(-4)$ et $f(2)$.

INDICE

Point délicat : $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe du trinôme $(x+4)(x-2)$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour tout réel x, $e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe du trinôme $(x+4)(x-2)$, de racines -4 et 2 : ce trinôme, de coefficient de x^2 égal à $1 > 0$, est négatif entre ses racines et positif ailleurs.

Variations.

- Sur $]-\infty;-4]$, $f'(x) \geq 0$: f est croissante.
- Sur $[-4;2]$, $f'(x) \leq 0$: f est décroissante.
- Sur $[2;+\infty[$, $f'(x) \geq 0$: f est croissante.

Valeurs exactes.

$$\begin{aligned} f(-4) &= (16-8)\,e^{-4} \\ &= 8e^{-4}, \\ f(2) &= (4-8)\,e^{2} \\ &= -4e^{2}. \end{aligned}$$

Tableau de variations.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$8e^{-4}$	$\searrow$	$-4e^{2}$	$\nearrow$	

Conclusion. f est croissante sur $]-\infty;-4]$, décroissante sur $[-4;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$, avec $f(-4) = 8e^{-4}$ et $f(2) = -4e^{2}$.

3.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Début : en $-\infty$, développe $f(x) = x^2e^x - 8e^x$. **Outil :** les croissances comparées.

CORRIGÉ

En $-\infty$. Pour tout réel x, $f(x) = x^2e^x - 8e^x$. D'après les croissances comparées, $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$; d'après les limites de l'exponentielle aux bornes, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Par différence, la limite de f en $-\infty$ est 0.

En $+\infty$. $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2-8\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par produit, la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 6

La montée en production d'une usine

Une usine fictive lance un nouveau produit. Sa production mensuelle, en milliers d'unités, est modélisée par $P(t) = 40 - 30\,e^{-0{,}2t}$, où $t \geq 0$ est le nombre de mois écoulés. Les données sont fictives.

1.

Calculer $P(0)$. Montrer que P est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

INDICE

Outil : la dérivée de e^u avec $u(t) = -0{,}2t$.

CORRIGÉ

Valeur initiale. $P(0) = 40 - 30\,e^{0} = 10$: au départ, l'usine produit 10 milliers d'unités par mois.

Dérivée. D'après la dérivée de e^u avec $u(t) = -0{,}2t$, la fonction P est dérivable sur $[0;+\infty[$ et, pour tout $t \geq 0$, $P'(t) = -30 \times (-0{,}2)\,e^{-0{,}2t} = 6\,e^{-0{,}2t}$.

Signe. Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}2t} > 0$, donc $P'(t) > 0$.

Conclusion. $P(0) = 10$, et P est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2.

Calculer la limite de $P(t)$ quand t tend vers $+\infty$, et l'interpréter.

INDICE

Outil : $-0{,}2t$ tend vers $-\infty$; utilise la limite de l'exponentielle en $-\infty$, puis la limite d'une fonction composée.

CORRIGÉ

Limite de l'exponentielle. Quand t tend vers $+\infty$, $-0{,}2t$ tend vers $-\infty$. D'après les limites de l'exponentielle aux bornes, $\lim_{X \to -\infty} e^{X} = 0$; par la limite d'une fonction composée, $e^{-0{,}2t}$ tend vers 0.

Limite de P. Par produit et somme, $\lim_{t \to +\infty} P(t) = 40$.

Interprétation. Pour tout $t \geq 0$, $30\,e^{-0{,}2t} > 0$, donc $P(t) < 40$.

Conclusion. La limite de $P(t)$ en $+\infty$ vaut 40 : à long terme, la production mensuelle se rapproche de 40 milliers d'unités, sans jamais les atteindre.

3.

Déterminer à partir de quel nombre entier de mois la production atteint au moins 35 milliers d'unités.

INDICE

Début : isole l'exponentielle : $e^{-0{,}2t} \leq \dfrac{1}{6}$. **Point délicat :** à la fin, divise par $-0{,}2$.

CORRIGÉ

Inéquation. Pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} & P(t) \geq 35 \\ \Leftrightarrow\ & 30\,e^{-0{,}2t} \leq 5 \\ \Leftrightarrow\ & e^{-0{,}2t} \leq \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Logarithme. Comme $\dfrac{1}{6} = e^{-\ln 6}$, la stricte croissance de l'exponentielle donne $-0{,}2t \leq -\ln 6$. On divise par $-0{,}2$, strictement négatif, ce qui change le sens :

$$t \geq \frac{-\ln 6}{-0{,}2} = 5\ln 6.$$

Seuil entier. $5\ln 6 \approx 8{,}96$. Contrôle : $P(8) \approx 33{,}94$ et $P(9) \approx 35{,}04$.

Conclusion. La production atteint au moins 35 milliers d'unités à partir de $t = 9$ mois.

4.

Déterminer une primitive de $t \mapsto e^{-0{,}2t}$ sur $[0;+\infty[$, puis une primitive de P sur cet intervalle.

INDICE

Outil : avec $u(t) = -0{,}2t$, on a $u'(t) = -0{,}2$; écris $e^{-0{,}2t} = -5 \times \left(-0{,}2\,e^{-0{,}2t}\right)$.

CORRIGÉ

Primitive de $t \mapsto e^{-0{,}2t}$. Posons $u(t) = -0{,}2t$, donc $u'(t) = -0{,}2$. Pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} & e^{-0{,}2t} \\ & = -5 \times \left(-0{,}2\,e^{-0{,}2t}\right). \end{aligned}$$

C'est $-5\,u'(t)\,e^{u(t)}$: une primitive est $t \mapsto -5\,e^{-0{,}2t}$.

Primitive de P. Une primitive de $t \mapsto 40$ est $t \mapsto 40t$. Par linéarité, une primitive de P est la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F(t) &= 40t \\ &\quad - 30 \times \left(-5\,e^{-0{,}2t}\right) \\ &= 40t + 150\,e^{-0{,}2t}. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout $t \geq 0$, $F'(t) = 40 + 150 \times (-0{,}2)\,e^{-0{,}2t}$, soit $F'(t) = 40 - 30\,e^{-0{,}2t} = P(t)$.

Conclusion. Sur $[0;+\infty[$, une primitive de $t \mapsto e^{-0{,}2t}$ est $t \mapsto -5\,e^{-0{,}2t}$, et une primitive de P est F, avec $F(t) = 40t + 150\,e^{-0{,}2t}$.

Exercice 7

La valeur d'une machine qui baisse d'une année à l'autre

Une entreprise fictive achète une machine $50\,000$ dirhams. D'une année à l'autre, la valeur de la machine est multipliée par $0{,}8$. On note $V(t)$ sa valeur, en dirhams, après t années : $V(t) = 50\,000 \times 0{,}8^t$. Les données sont fictives.

1.

Calculer $V(1)$ et $V(2)$. Écrire $V(t)$ sous la forme $50\,000\,e^{kt}$, avec k réel.

INDICE

Outil : $a^t = e^{t\ln a}$.

CORRIGÉ

Valeurs. $V(1) = 50\,000 \times 0{,}8 = 40\,000$. Puis $V(2) = 50\,000 \times 0{,}8^2$, soit $V(2) = 40\,000 \times 0{,}8 = 32\,000$.

Écriture exponentielle. Pour tout $t \geq 0$, $0{,}8^t = e^{t\ln 0{,}8}$, donc $V(t) = 50\,000\,e^{t\ln 0{,}8}$.

Conclusion. $V(1) = 40\,000$ dirhams, $V(2) = 32\,000$ dirhams, et $V(t) = 50\,000\,e^{kt}$ avec $k = \ln 0{,}8$.

2.

Justifier que V est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, puis calculer la limite de $V(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

INDICE

Point délicat : le signe de $\ln 0{,}8$. **Outil :** les limites d'une exponentielle de base comprise entre 0 et 1.

CORRIGÉ

Dérivée. Avec $k = \ln 0{,}8$, $V(t) = 50\,000\,e^{kt}$. D'après la dérivée de e^u, pour tout $t \geq 0$, $V'(t) = 50\,000\,k\,e^{kt}$.

Signe. Comme $0 < 0{,}8 < 1$, $k = \ln 0{,}8 < 0$; et $e^{kt} > 0$. Donc $V'(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$.

Limite. La base $0{,}8$ est comprise entre 0 et 1, donc $0{,}8^t$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Par produit, $V(t)$ tend vers 0.

Conclusion. V est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, et $\lim_{t\to+\infty} V(t) = 0$.

3.

Au bout de combien d'années entières la valeur de la machine devient-elle inférieure à $20\,000$ dirhams ?

INDICE

Début : écris $0{,}8^t < 0{,}4$, puis prends le logarithme. **Point délicat :** le sens change en divisant par $\ln 0{,}8$.

CORRIGÉ

Inéquation. Pour tout $t \geq 0$, on divise par $50\,000 > 0$, puis on applique le logarithme, strictement croissant, avec $\ln\left(0{,}8^t\right) = t \ln 0{,}8$:

$$\begin{aligned} & V(t) < 20\,000 \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}8^t < 0{,}4 \\ \Leftrightarrow\ & t \ln 0{,}8 < \ln 0{,}4. \end{aligned}$$

Division. Comme $\ln 0{,}8 < 0$, en divisant par $\ln 0{,}8$ le sens change : $t > \dfrac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}8}$, avec $\dfrac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}8} \approx 4{,}11$.

Contrôle. $V(4) = 20\,480$ et $V(5) = 16\,384$.

Conclusion. La valeur de la machine devient inférieure à $20\,000$ dirhams au bout de 5 années entières.