BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Application	8

Exercice 1

Simplifier avec l'exponentielle et le logarithme

1.

Simplifier les nombres $A = \ln\left(e^{7}\right)$, $B = e^{\ln 12}$ et $C = \ln\left(e^{-2{,}5}\right)$.

INDICE

Outil : le logarithme et l'exponentielle se défont l'un l'autre. **Point délicat :** pour B, vérifie que 12 est strictement positif.

2.

Simplifier $D = e^{\ln 5 + \ln 2}$ et $E = e^{-\ln 8}$.

INDICE

Début : écris d'abord l'exposant comme un seul logarithme. **Outil :** rappel, $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ et $-\ln b = \ln\left(\dfrac{1}{b}\right)$.

3.

Pour tout réel x strictement positif, simplifier $\ln\left(x\,e^{x}\right) - x$.

INDICE

Outil : le logarithme d'un produit de deux réels strictement positifs. **Point délicat :** $e^{x} > 0$ pour tout réel x.

Exercice 2

Transformer une expression exponentielle

1.

Écrire sous la forme e^n, avec n entier : $P = \dfrac{e^5 \times e^{-2}}{e^4}$ et $Q = \left(e^3\right)^2 \times e^{-4}$.

INDICE

Outil : les exposants s'additionnent dans un produit et se soustraient dans un quotient. **Ensuite :** $(e^a)^n = e^{na}$.

2.

Vérifier que, pour tout réel x, $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$.

INDICE

Outil : l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **Point délicat :** calcule le produit $e^x \times e^{-x}$.

3.

Vérifier que, pour tout réel x, $\dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

INDICE

Début : divise le numérateur et le dénominateur par e^x. **Outil :** $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Exercice 3

Résoudre des équations exponentielles

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x-1} = e^{x+3}$.

INDICE

Outil : l'exponentielle est strictement croissante ; compare les exposants des deux membres.

2.

Résoudre $e^{3x} = 5$. Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

INDICE

Outil : pour $k > 0$, $e^{u} = k \Leftrightarrow u = \ln k$.

3.

Résoudre $e^{x^2-1} = 1$.

INDICE

Début : écris 1 comme une exponentielle. **Ensuite :** résous une équation du second degré.

4.

Résoudre $e^{x+2} = 0$, puis $2e^{4x} + 6 = 0$.

INDICE

Point délicat : isole l'exponentielle, puis regarde le signe du second membre.

Exercice 4

Résoudre des inéquations exponentielles

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{3x+1} > e^{x-5}$.

INDICE

Outil : la stricte croissance de l'exponentielle conserve le sens de l'inégalité.

2.

Résoudre $e^{-2x} \leq 4$.

INDICE

Début : écris $4 = e^{\ln 4}$. **Point délicat :** à la fin, tu divises par un nombre négatif.

3.

Résoudre $e^{x} > -2$, puis $e^{x-1} < 0$.

INDICE

Outil : une exponentielle est strictement positive.

Exercice 5

Dériver des fonctions avec une exponentielle

1.

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(x) = e^{5x-2}$.

INDICE

Outil : $(e^u)' = u'\,e^u$. **Début :** ici $u(x) = 5x - 2$.

2.

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par $g(x) = e^{-x^2+3x}$.

INDICE

Outil : même formule. **Point délicat :** dérive soigneusement l'exposant du second degré.

3.

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction h définie par $h(x) = 4x - e^{-3x}$. Justifier que $h'(x) > 0$ pour tout réel x.

INDICE

Début : dérive chaque terme de la différence. **Point délicat :** la dérivée de e^{-3x} porte le facteur -3.

4.

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction k définie par $k(x) = (x-4)\,e^{2x}$, et écrire $k'(x)$ sous forme factorisée.

INDICE

Outil : la dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$. **Ensuite :** mets e^{2x} en facteur.

Exercice 6

Limites de référence avec l'exponentielle

1.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x^2\right)$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(3e^x-2\right)$.

INDICE

Outil : les limites de l'exponentielle aux bornes, puis les opérations sur les limites.

2.

Calculer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}$.

INDICE

Début : pose $X=-x$ et cherche la limite de X.

3.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x$.

INDICE

Outil : les croissances comparées, avec $n=3$ puis $n=2$.

4.

Calculer $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}$.

INDICE

Début : sors le facteur $\dfrac{1}{2}$. **Outil :** la limite de $\dfrac{e^x-1}{x}$ en 0.

Exercice 7

Primitives de fonctions de la forme u'e^u

1.

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 6\,e^{2x+1}$.

INDICE

Début : avec $u(x) = 2x+1$, écris $6 = 3 \times 2$.

2.

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = (2x-1)\,e^{x^2-x}$.

INDICE

Outil : cherche un exposant $u(x)$ dont la dérivée est le facteur $2x-1$.

3.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = e^{-4x} + 2x$.

INDICE

Début : traite les deux termes séparément. **Point délicat :** la dérivée de e^{-4x} est $-4\,e^{-4x}$.

4.

Déterminer la primitive G de g (question 2) qui vérifie $G(0) = 0$.

INDICE

Outil : $G(x) = e^{x^2-x} + C$; calcule $G(0)$.

Exercice 8

Puissances de base a et équations

1.

Écrire 3^x et $0{,}5^x$ sous la forme $e^{u(x)}$. Préciser le sens de variation de chacune de ces fonctions.

INDICE

Outil : $a^x = e^{x\ln a}$. **Point délicat :** le sens dépend du signe de $\ln a$.

2.

Résoudre $2^x = 20$. Donner une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.

INDICE

Outil : prends le logarithme des deux membres, strictement positifs.

3.

Résoudre $0{,}9^x < 0{,}5$.

INDICE

Début : écris $x\ln 0{,}9 < \ln 0{,}5$. **Point délicat :** quel est le signe de $\ln 0{,}9$?