BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Application	8

Exercice 1

Simplifier avec l'exponentielle et le logarithme

1.

Simplifier les nombres $A = \ln\left(e^{7}\right)$, $B = e^{\ln 12}$ et $C = \ln\left(e^{-2{,}5}\right)$.

INDICE

Outil : le logarithme et l'exponentielle se défont l'un l'autre. **Point délicat :** pour B, vérifie que 12 est strictement positif.

CORRIGÉ

Logarithme d'une exponentielle. Pour tout réel a, $\ln\left(e^{a}\right) = a$. Avec $a = 7$, puis $a = -2{,}5$:

$$A = \ln\left(e^{7}\right) = 7,$$
$$C = \ln\left(e^{-2{,}5}\right) = -2{,}5.$$

Exponentielle d'un logarithme. Pour tout réel $b > 0$, $e^{\ln b} = b$. Le réel 12 est strictement positif, donc :

$$B = e^{\ln 12} = 12.$$

Conclusion. $A = 7$, $B = e^{\ln 12} = 12$ et $C = -2{,}5$.

2.

Simplifier $D = e^{\ln 5 + \ln 2}$ et $E = e^{-\ln 8}$.

INDICE

Début : écris d'abord l'exposant comme un seul logarithme. **Outil :** rappel, $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ et $-\ln b = \ln\left(\dfrac{1}{b}\right)$.

CORRIGÉ

Calcul de D. Pour deux réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. L'exposant vaut donc $\ln 5 + \ln 2 = \ln 10$, et comme $10 > 0$:

$$D = e^{\ln 10} = 10.$$

Calcul de E. Pour $b > 0$, $-\ln b = \ln\left(\dfrac{1}{b}\right)$. Ici $-\ln 8 = \ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$ et $\dfrac{1}{8} > 0$, donc :

$$E = e^{\ln\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{8}.$$

Conclusion. $D = e^{\ln 10} = 10$ et $E = \dfrac{1}{8}$.

3.

Pour tout réel x strictement positif, simplifier $\ln\left(x\,e^{x}\right) - x$.

INDICE

Outil : le logarithme d'un produit de deux réels strictement positifs. **Point délicat :** $e^{x} > 0$ pour tout réel x.

CORRIGÉ

Soit x un réel strictement positif. Les réels x et e^{x} sont strictement positifs : on peut appliquer le logarithme d'un produit.

$$\begin{aligned}&\ln\left(x\,e^{x}\right) - x\\&= \ln x + \ln\left(e^{x}\right) - x\\&= \ln x + x - x\\&= \ln x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(x\,e^{x}\right) - x = \ln x$.

Exercice 2

Transformer une expression exponentielle

1.

Écrire sous la forme e^n, avec n entier : $P = \dfrac{e^5 \times e^{-2}}{e^4}$ et $Q = \left(e^3\right)^2 \times e^{-4}$.

INDICE

Outil : les exposants s'additionnent dans un produit et se soustraient dans un quotient. **Ensuite :** $(e^a)^n = e^{na}$.

CORRIGÉ

Calcul de P. Les exposants s'additionnent dans un produit et se soustraient dans un quotient :

$$\begin{aligned} P &= \frac{e^{5-2}}{e^4} = \frac{e^3}{e^4} \\ &= e^{3-4} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Calcul de Q. Comme $\left(e^3\right)^2 = e^{3\times 2} = e^6$:

$$Q = e^6 \times e^{-4} = e^2.$$

Conclusion. $P = e^{-1}$ et $Q = e^2$.

2.

Vérifier que, pour tout réel x, $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$.

INDICE

Outil : l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **Point délicat :** calcule le produit $e^x \times e^{-x}$.

CORRIGÉ

Soit x un réel.

Trois résultats utiles. $\left(e^x\right)^2 = e^{2x}$, $\left(e^{-x}\right)^2 = e^{-2x}$ et $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$.

Développement. Avec l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} &\left(e^x + e^{-x}\right)^2 \\ &= e^{2x} + 2 \times 1 + e^{-2x} \\ &= e^{2x} + e^{-2x} + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$.

3.

Vérifier que, pour tout réel x, $\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

INDICE

Début : divise le numérateur et le dénominateur par e^x. **Outil :** $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Le réel e^x n'est pas nul : on divise le numérateur et le dénominateur par e^x, en utilisant $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{e^x+1} &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{e^x}} \\ &= \frac{1}{1+e^{-x}}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

Exercice 3

Résoudre des équations exponentielles

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x-1} = e^{x+3}$.

INDICE

Outil : l'exponentielle est strictement croissante ; compare les exposants des deux membres.

CORRIGÉ

Égalité des exposants. L'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: pour tous réels a et b, l'égalité $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{2x-1} = e^{x+3} \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 1 = x + 3 \\ \Leftrightarrow\ & x = 4. \end{aligned}$$

Conclusion. L'équation a une unique solution, le réel 4 : $S = \{4\}$.

2.

Résoudre $e^{3x} = 5$. Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

INDICE

Outil : pour $k > 0$, $e^u = k \Leftrightarrow u = \ln k$.

CORRIGÉ

Passage au logarithme. Le réel 5 est strictement positif, donc $5 = e^{\ln 5}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{3x} = 5 \\ \Leftrightarrow\ & 3x = \ln 5 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\ln 5}{3}. \end{aligned}$$

Valeur approchée. À la calculatrice, $\dfrac{\ln 5}{3} \approx 0{,}536$.

Conclusion. L'unique solution est $x = \dfrac{\ln 5}{3}$, et $x \approx 0{,}536$ à 10^{-3} près.

3.

Résoudre $e^{x^2-1} = 1$.

INDICE

Début : écris 1 comme une exponentielle. **Ensuite :** résous une équation du second degré.

CORRIGÉ

Écriture de 1. Comme $1 = e^0$, l'égalité des exposants donne, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{x^2-1} = e^0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 1. \end{aligned}$$

Conclusion. $x^2 = 1$ équivaut à $x = -1$ ou $x = 1$: l'ensemble des solutions est $S = \{-1; 1\}$.

4.

Résoudre $e^{x+2} = 0$, puis $2e^{4x} + 6 = 0$.

INDICE

Point délicat : isole l'exponentielle, puis regarde le signe du second membre.

CORRIGÉ

Première équation. Pour tout réel x, $e^{x+2} > 0$, donc $e^{x+2} \neq 0$: l'équation $e^{x+2} = 0$ n'a aucune solution.

Seconde équation. Pour tout réel x, $2e^{4x} + 6 = 0 \Leftrightarrow e^{4x} = -3$. Or $e^{4x} > 0$ alors que $-3 < 0$: cette équation n'a aucune solution.

Conclusion. Aucune des deux équations n'a de solution : dans les deux cas, $S = \varnothing$.

Exercice 4

Résoudre des inéquations exponentielles

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{3x+1} > e^{x-5}$.

INDICE

Outil : la stricte croissance de l'exponentielle conserve le sens de l'inégalité.

CORRIGÉ

Comparaison des exposants. L'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle conserve le sens des inégalités. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{3x+1} > e^{x-5} \\ \Leftrightarrow\ & 3x+1 > x-5 \\ \Leftrightarrow\ & 2x > -6 \\ \Leftrightarrow\ & x > -3. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $]-3;+\infty[$.

2.

Résoudre $e^{-2x} \leq 4$.

INDICE

Début : écris $4 = e^{\ln 4}$. **Point délicat :** à la fin, tu divises par un nombre négatif.

CORRIGÉ

Écriture de 4. Comme $4 > 0$, $4 = e^{\ln 4}$. Par stricte croissance de l'exponentielle, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{-2x} \leq 4 \\ \Leftrightarrow\ & -2x \leq \ln 4. \end{aligned}$$

Division par -2. On divise par -2, nombre strictement négatif : le sens de l'inégalité change. Comme $\ln 4 = 2\ln 2$:

$$x \geq -\frac{\ln 4}{2} = -\ln 2.$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de $e^{-2x} \leq 4$ est $[-\ln 2;+\infty[$.

3.

Résoudre $e^x > -2$, puis $e^{x-1} < 0$.

INDICE

Outil : une exponentielle est strictement positive.

CORRIGÉ

Première inéquation. Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $0 > -2$, donc $e^x > -2$: tout réel est solution.

Seconde inéquation. Pour tout réel x, $e^{x-1} > 0$: l'inégalité $e^{x-1} < 0$ est toujours fausse, aucun réel n'est solution.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $e^x > -2$ est $\mathbb{R}$; celui de $e^{x-1} < 0$ est $\varnothing$.

Exercice 5

Dériver des fonctions avec une exponentielle

1.

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(x) = e^{5x-2}$.

INDICE

Outil : $(e^u)' = u'\,e^u$. **Début :** ici $u(x) = 5x - 2$.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = 5x - 2$: la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 5$. D'après la dérivée de e^u, $(e^u)' = u'\,e^u$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 5\,e^{5x-2}$.

2.

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par $g(x) = e^{-x^2+3x}$.

INDICE

Outil : même formule. **Point délicat :** dérive soigneusement l'exposant du second degré.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = -x^2 + 3x$: la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2x + 3$. D'après la dérivée de e^u, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $g'(x) = (-2x + 3)\,e^{-x^2+3x}$.

3.

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction h définie par $h(x) = 4x - e^{-3x}$. Justifier que $h'(x) > 0$ pour tout réel x.

INDICE

Début : dérive chaque terme de la différence. **Point délicat :** la dérivée de e^{-3x} porte le facteur -3.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la dérivée de e^u avec $u(x) = -3x$, la fonction $x \mapsto e^{-3x}$ a pour dérivée $x \mapsto -3\,e^{-3x}$. Donc, pour tout réel x, $h'(x) = 4 - \left(-3\,e^{-3x}\right) = 4 + 3\,e^{-3x}$.

Signe. Pour tout réel x, $e^{-3x} > 0$, donc $3\,e^{-3x} > 0$ et $h'(x) > 4$.

Conclusion. Pour tout réel x, $h'(x) = 4 + 3\,e^{-3x}$, et $h'(x) > 0$.

4.

Dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction k définie par $k(x) = (x-4)\,e^{2x}$, et écrire $k'(x)$ sous forme factorisée.

INDICE

Outil : la dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$. **Ensuite :** mets e^{2x} en facteur.

CORRIGÉ

Dérivée d'un produit. Posons $u(x) = x - 4$ et $v(x) = e^{2x}$: $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2\,e^{2x}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} k'(x) &= 1 \times e^{2x} \\ &\quad + (x-4) \times 2\,e^{2x}. \end{aligned}$$

Factorisation. On met e^{2x} en facteur, avec $1 + 2(x-4) = 2x - 7$:

$$k'(x) = (2x-7)\,e^{2x}.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $k'(x) = (2x-7)\,e^{2x}$.

Exercice 6

Limites de référence avec l'exponentielle

1.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x^2\right)$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(3e^x-2\right)$.

INDICE

Outil : les limites de l'exponentielle aux bornes, puis les opérations sur les limites.

CORRIGÉ

En $+\infty$. D'après les limites de l'exponentielle aux bornes, $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$; de plus, $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$. Par somme :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x^2\right)=+\infty.$$

En $-\infty$. $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$, donc, par produit puis somme :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3e^x-2\right)=-2.$$

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x^2\right)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(3e^x-2\right)=-2$.

2.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}$.

INDICE

Début : pose $X=-x$ et cherche la limite de X.

CORRIGÉ

Limite de l'exposant. Posons $X=-x$. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $-\infty$.

Limite de l'exponentielle. D'après les limites de l'exponentielle aux bornes, $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$.

Conclusion. D'après la limite d'une fonction composée, $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

3.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$ et $\lim_{x\to-\infty}x^2e^x$.

INDICE

Outil : les croissances comparées, avec $n=3$ puis $n=2$.

CORRIGÉ

Premier calcul. D'après les croissances comparées, $\dfrac{e^x}{x^n}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, pour tout entier $n\geq1$. Avec $n=3$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty.$$

Second calcul. De même, x^ne^x tend vers 0 en $-\infty$. Avec $n=2$:

$$\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0.$$

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0$.

4.

Calculer $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{2x}$.

INDICE

Début : sors le facteur $\dfrac{1}{2}$. **Outil :** la limite de $\dfrac{e^{x}-1}{x}$ en 0.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout réel $x\neq 0$:

$$\frac{e^{x}-1}{2x}=\frac{1}{2}\times\frac{e^{x}-1}{x}.$$

Limite de référence. On sait que $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$. Par produit par $\dfrac{1}{2}$, la limite cherchée vaut $\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 7

Primitives de fonctions de la forme u'e^u

1.

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 6\,e^{2x+1}$.

INDICE

Début : avec $u(x) = 2x + 1$, écris $6 = 3 \times 2$.

CORRIGÉ

Forme $u'e^u$. Posons $u(x) = 2x + 1$, donc $u'(x) = 2$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \times 2\,e^{2x+1} \\ &= 3\,u'(x)\,e^{u(x)}. \end{aligned}$$

Une primitive. Une primitive de $u'e^u$ est e^u. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto 3\,e^{2x+1}$.

Conclusion. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto 3\,e^{2x+1} + C$, où C est un réel.

2.

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = (2x - 1)\,e^{x^2 - x}$.

INDICE

Outil : cherche un exposant $u(x)$ dont la dérivée est le facteur $2x - 1$.

CORRIGÉ

Forme $u'e^u$. Posons $u(x) = x^2 - x$: $u'(x) = 2x - 1$. Pour tout réel x, $g(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$.

Une primitive. Une primitive de $u'e^u$ est e^u : une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto e^{x^2 - x}$.

Conclusion. Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{x^2 - x} + C$, où C est un réel.

3.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = e^{-4x} + 2x$.

INDICE

Début : traite les deux termes séparément. **Point délicat :** la dérivée de e^{-4x} est $-4\,e^{-4x}$.

CORRIGÉ

Premier terme. Posons $u(x) = -4x$, donc $u'(x) = -4$. Pour tout réel x :

$$e^{-4x} = -\frac{1}{4} \times \left(-4\,e^{-4x}\right).$$

Une primitive de $x \mapsto e^{-4x}$ est donc $x \mapsto -\dfrac{1}{4}\,e^{-4x}$.

Second terme. Une primitive de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2$.

Conclusion. Par somme, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{4}\,e^{-4x} + x^2$.

4.

Déterminer la primitive G de g (question 2) qui vérifie $G(0) = 0$.

INDICE

Outil : $G(x) = e^{x^2 - x} + C$; calcule $G(0)$.

CORRIGÉ

Forme de G. D'après la question 2, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $G(x) = e^{x^2 - x} + C$.

Constante. $G(0) = e^0 + C = 1 + C$. La condition $G(0) = 0$ donne $1 + C = 0$, soit $C = -1$.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction G définie, pour tout réel x, par $G(x) = e^{x^2 - x} - 1$.

Exercice 8

Puissances de base a et équations

1.

Écrire 3^x et $0{,}5^x$ sous la forme $e^{u(x)}$. Préciser le sens de variation de chacune de ces fonctions.

INDICE

Outil : $a^x = e^{x\ln a}$. **Point délicat :** le sens dépend du signe de $\ln a$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x, $a^x = e^{x\ln a}$. Comme $\ln 0{,}5 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3^x &= e^{x\ln 3},\\ 0{,}5^x &= e^{-x\ln 2}. \end{aligned}$$

Sens de variation. Il dépend du signe de $\ln a$.

- Comme $3 > 1$, $\ln 3 > 0$: la fonction $x \mapsto 3^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Comme $0 < 0{,}5 < 1$, $\ln 0{,}5 < 0$: la fonction $x \mapsto 0{,}5^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $3^x = e^{x\ln 3}$ et $0{,}5^x = e^{-x\ln 2}$; la première fonction est strictement croissante, la seconde strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2.

Résoudre $2^x = 20$. Donner une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.

INDICE

Outil : prends le logarithme des deux membres, strictement positifs.

CORRIGÉ

Égalité des exposants. Pour tout réel x, $2^x = e^{x\ln 2}$, et $20 = e^{\ln 20}$ car $20 > 0$. Comme $\ln 2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} & 2^x = 20\\ \Leftrightarrow\ & x\ln 2 = \ln 20\\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\ln 20}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Valeur approchée. À la calculatrice, $\frac{\ln 20}{\ln 2} \approx 4{,}322$.

Conclusion. L'unique solution est $\frac{\ln 20}{\ln 2}$, et $\frac{\ln 20}{\ln 2} \approx 4{,}322$ à 10^{-3} près.

3.

Résoudre $0{,}9^x < 0{,}5$.

INDICE

Début : écris $x \ln 0{,}9 < \ln 0{,}5$. **Point délicat :** quel est le signe de $\ln 0{,}9$?

CORRIGÉ

Comparaison des exposants. Pour tout réel x, $0{,}9^x = e^{x \ln 0{,}9}$, et $0{,}5 = e^{\ln 0{,}5}$. Par stricte croissance de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} & 0{,}9^x < 0{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & x \ln 0{,}9 < \ln 0{,}5. \end{aligned}$$

Division. Comme $0 < 0{,}9 < 1$, $\ln 0{,}9 < 0$: en divisant par $\ln 0{,}9$, le sens de l'inégalité change. On obtient $x > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}$, avec $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}579$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $0{,}9^x < 0{,}5$ est $\left]\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}; +\infty\right[$.