BURHAN

Fonctions exponentielles

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/fonctions-exponentielles/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions exponentielles	Semestre 2

Pourquoi une nouvelle fonction ?

Une ville qui grandit

La ville fictive de Belqass compte $40\,000$ habitants. Un urbaniste, lui aussi fictif, observe que sa population est multipliée par $1{,}05$ par an.

Après un an, elle vaut $42\,000$ habitants. Après deux ans, elle vaut $44\,100$ habitants.

L'urbaniste place aussi sur un graphique le logarithme népérien de la population, année après année. Surprise : les points obtenus sont alignés.

Devine : Le logarithme de la population

D'une année à l'autre, comment évolue $\ln P$, où P est la population de Belqass ?

A. Il est multiplié par $1{,}05$.

Faux.

C'est la population qui est multipliée, pas son logarithme.

B. Il augmente de $\ln 1{,}05$.

Juste.

Juste : le logarithme transforme un produit en somme.

C. Il augmente de $0{,}05$.

Faux.

Presque : $\ln 1{,}05 \approx 0{,}0488$, et non $0{,}05$.

D. Il ne change pas.

Faux.

La population grandit et $\ln$ est strictement croissante : son logarithme grandit aussi.

Correction

Si la population vaut P une année, elle vaut $1{,}05\,P$ l'année suivante. D'après la propriété du logarithme d'un produit :

$$\begin{aligned}&\ln(1{,}05\,P)\\&= \ln P + \ln 1{,}05\end{aligned}$$

Le logarithme augmente donc de $\ln 1{,}05 \approx 0{,}0488$ par an : les points sont alignés.

Le chemin inverse

Rappel du chapitre précédent. La fonction $\ln$ est définie, continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Elle vérifie $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$. Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Ses limites sont $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. Elle prend donc toutes les valeurs réelles, chacune une seule fois.

L'urbaniste fait maintenant le chemin inverse. Sur sa droite, il lit $\ln P = 11$ pour une année future. Combien d'habitants cela fait-il ?

Il cherche le réel $P > 0$ dont le logarithme vaut 11. Commençons par un cas plus simple.

Devine : Un logarithme égal à 2

Quel réel x strictement positif vérifie $\ln x = 2$?

A. $x = 2$

Faux.

$\ln 2 \approx 0{,}693$: c'est loin de 2.

B. $x = 2e$

Faux.

$\ln(2e) = \ln 2 + \ln e \approx 1{,}693$.

C. $x = e^2$

Juste.

Juste : $\ln(e \times e) = \ln e + \ln e = 2$.

D. $x = \sqrt{e}$

Faux.

$\ln \sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$, car $\left(\sqrt{e}\right)^2 = e$.

Correction

On a $e^2 = e \times e$. D'après la propriété du logarithme d'un produit :

$$\begin{aligned} \ln(e \times e) &= \ln e + \ln e \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc $x = e^2 \approx 7{,}389$ convient.

C'est le seul : $\ln$ est strictement croissante, elle ne prend la valeur 2 qu'une fois.

Une nouvelle fonction

L'idée. La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante, de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de la fonction réciproque, admis au chapitre de la continuité, chaque réel y est le logarithme d'un seul réel $x > 0$.

On associe à chaque réel y ce nombre x. On obtient une nouvelle fonction, définie sur $\mathbb{R}$: la réciproque de $\ln$.

À toi : Un logarithme égal à 3

Trouve la valeur exacte du réel $x > 0$ tel que $\ln x = 3$, puis une valeur approchée à la calculatrice. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pense à $\ln e = 1$ et à la propriété du logarithme d'un produit.
Indice 2
Calcule $\ln(e \times e \times e)$.
Indice 3
Point délicat : la valeur exacte est e^3 ; la calculatrice ne donne qu'une valeur approchée.

Réponse
Valeur exacte. Comme $e^3 = e \times e \times e$, la propriété du logarithme d'un produit donne :

$$\begin{aligned} &\ln\left(e^3\right) \\ &= \ln e + \ln e + \ln e \\ &= 3. \end{aligned}$$

Comme $\ln$ est strictement croissante, $x = e^3$ est le seul réel qui convient.

Valeur approchée. La calculatrice donne $e^3 \approx 20{,}09$.

Retour à Belqass. De la même façon, $\ln P = 11$ donne $P = e^{11}$. La calculatrice affiche environ $59\,874$ habitants.

La touche qui fait ce calcul défait ce que fait la touche $\ln$. Sur ta calculatrice, elle porte l'inscription e^x.

Dans ce chapitre, tu définis cette fonction, l'exponentielle, et tu apprends ses règles de calcul.

Tu résous des équations, des inéquations et des systèmes. Tu dérives, tu calcules des limites et tu étudies des fonctions.

Tu modélises enfin des grandeurs multipliées par un même coefficient, comme la population de Belqass.

La fonction exponentielle népérienne

La fonction exponentielle

Devine : L'image de zéro

On note $\exp$ la réciproque de $\ln$. Que vaut $\exp(0)$?

A. 0

Faux.

On aurait alors $\ln 0 = 0$; or $\ln 0$ n'existe pas.

B. 1

Juste.

Juste : $\ln 1 = 0$, donc la réciproque envoie 0 sur 1.

C. e

Faux.

C'est l'image de 1, car $\ln e = 1$.

D. -1

Faux.

Un réel négatif n'a pas de logarithme : $\ln(-1)$ n'existe pas.

Correction

La réciproque de $\ln$ associe à 0 le seul réel $x > 0$ tel que $\ln x = 0$.

Or $\ln 1 = 0$. Donc $\exp(0) = 1$.

En clair. La fonction cherchée défait ce que fait $\ln$:

- puisque $\ln 1 = 0$, elle envoie 0 sur 1 ;
- puisque $\ln e = 1$, elle envoie 1 sur e ;
- puisque $\ln\left(e^2\right) = 2$, elle envoie 2 sur e^2.

On l'appelle l'**exponentielle**.

Définition : Fonction exponentielle népérienne

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$; elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée **fonction exponentielle népérienne** et notée $\exp$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]0;+\infty[$: pour tout réel x et tout réel y strictement positif,

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y.$$

Notation. Pour tout réel x, on écrit $\exp(x) = e^x$, où $e = \exp(1)$ est le nombre tel que $\ln e = 1$ ($e \approx 2{,}718$).

Exemple : passer d'une écriture à l'autre

- Pour tout réel x : $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$. La calculatrice donne $\ln 5 \approx 1{,}609$.
- Pour tout réel $y > 0$: $\ln y = -1 \Leftrightarrow y = e^{-1}$. La calculatrice donne $e^{-1} \approx 0{,}368$.

- $e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}649$: c'est le réel dont le logarithme vaut $\dfrac{1}{2}$.

Exponentielle et logarithme

Pourquoi est-ce vrai ? Les relations qui suivent sont l'équivalence de la définition, lue dans un sens puis dans l'autre.

Les valeurs $e^0 = 1$ et $e^1 = e$ viennent de $\ln 1 = 0$ et de $\ln e = 1$.

Propriété : Exponentielle et logarithme

Pour tout réel x :

$$e^x > 0 \quad \text{et} \quad \ln\left(e^x\right) = x.$$

Pour tout réel y strictement positif : $e^{\ln y} = y$.

En particulier, $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Démonstration

Étape 1. Par définition de la fonction exponentielle, e^x appartient à $]0;+\infty[$, donc $e^x > 0$.

Étape 2. Posons $y = e^x$; d'après l'étape 1, $y > 0$. L'équivalence de la définition donne $x = \ln y$, c'est-à-dire $\ln\left(e^x\right) = x$.

Étape 3. Soit $y > 0$ et posons $x = \ln y$. La même équivalence donne $y = e^x$, c'est-à-dire $y = e^{\ln y}$.

Étape 4. Comme $\ln 1 = 0$, l'étape 3 avec $y = 1$ donne $e^0 = 1$. Comme $\ln e = 1$, elle donne avec $y = e$: $e^1 = e$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On part de l'équivalence de la définition, pour tout réel x et tout réel $y > 0$:

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$

- Dans un sens, avec $y = e^x$, elle donne $\ln\left(e^x\right) = x$.
- Dans l'autre, avec $x = \ln y$, elle donne $e^{\ln y} = y$.

La positivité vient de l'ensemble des valeurs : l'exponentielle prend ses valeurs dans $]0;+\infty[$.

Vérifie : Une valeur particulière

Dans la preuve, quel argument donne $e^0 = 1$?

A. On a $\ln 1 = 0$, puis $e^{\ln y} = y$ avec $y = 1$.

Juste.
Juste : c'est l'étape 4 de la preuve.

B. Tout nombre élevé à la puissance 0 vaut 1.
Faux.
Pour un réel x quelconque, e^x est défini par la réciproque de $\ln$, et non comme une puissance.
La preuve passe par $\ln 1 = 0$.

C. L'exponentielle est strictement croissante.
Faux.
La croissance compare des valeurs ; elle ne donne pas la valeur en zéro.

D. La dérivée de l'exponentielle vaut 1 en 0.
Faux.
La dérivée n'est pas encore connue, et la preuve ne l'emploie pas.

Correction
L'étape 4 applique la relation $e^{\ln y} = y$ avec $y = 1$. Comme $\ln 1 = 0$, on obtient :

$$e^0 = e^{\ln 1} = 1.$$

De même, $\ln e = 1$ donne $e^1 = e$.

Exemple **: simplifier**

Simplifier. $\ln\left(e^4\right) = 4$ et $e^{\ln 7} = 7$. De même :

$$\begin{aligned} &e^{\ln 2} + \ln\left(e^{-3}\right) \\ &= 2 + (-3) = -1. \end{aligned}$$

Pour tout réel x, $\ln\left(e^{x+1}\right) = x + 1$.

L'hypothèse compte. La relation $e^{\ln y} = y$ exige $y > 0$. L'écriture $e^{\ln(-2)}$ n'a pas de sens, car $\ln(-2)$ n'existe pas.

Deux courbes symétriques

Devine : Un point de chaque courbe

Le point $A(e;1)$ est sur la courbe de $\ln$, car $\ln e = 1$. Quel point est sûrement sur la courbe de $\exp$?

A. $(1;e)$
Juste.
Juste : $\exp(1) = e$. On a échangé l'abscisse et l'ordonnée.

B. $(e;1)$
Faux.
C'est A lui-même ; or $\exp(e) = e^e \approx 15{,}15$, et non 1.

C. $(-e;-1)$

Faux.

Son ordonnée est négative ; or l'exponentielle prend ses valeurs dans $]0;+\infty[$.

D. $(1;0)$

Faux.

C'est un point de la courbe de $\ln$, car $\ln 1 = 0$.

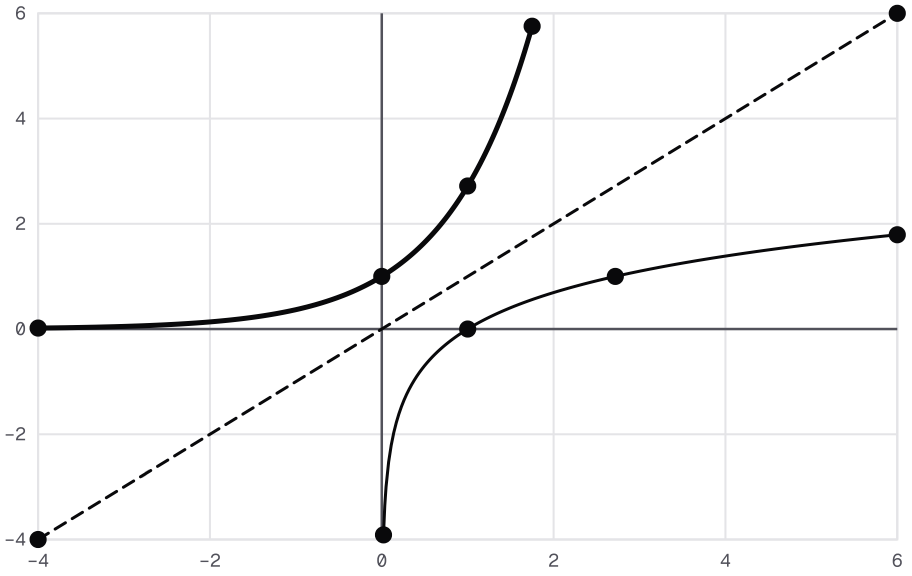
Correction

Soit $a > 0$ et b un réel. Le point $(a;b)$ est sur la courbe de $\ln$ lorsque $b = \ln a$, c'est-à-dire $a = e^b$.

Cela revient à dire que le point $(b;a)$ est sur la courbe de $\exp$. Ici, $(e;1)$ donne $(1;e)$.

En clair. On passe d'une courbe à l'autre en échangeant l'abscisse et l'ordonnée. Sur le graphique, c'est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Les points $(1;0)$ et $(0;1)$ se répondent, comme $(e;1)$ et $(1;e)$.



e^x $\ln x$ $y = x$ Point plein $(0;1)$ Point plein $(1;0)$ Point plein $(1;e)$ Point plein $(e;1)$ Point du graphe

Courbes de l'exponentielle et du logarithme népérien, symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

À toi : Simplifier, puis résoudre

Simplifie $A = e^{\ln 3} - \ln\left(e^{-2}\right)$. Trouve ensuite le réel x tel que $e^x = 10$, puis une valeur approchée. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Utilise les deux relations entre exponentielle et logarithme.

Indice 2

On a $e^{\ln 3} = 3$ et $\ln\left(e^{-2}\right) = -2$.

Indice 3

Point délicat : on soustrait -2, ce qui revient à ajouter 2.

Réponse

Simplification. D'après la relation entre exponentielle et logarithme, $e^{\ln 3} = 3$ et $\ln\left(e^{-2}\right) = -2$.

Donc :

$$A = 3 - (-2) = 5.$$

Équation. D'après la définition, pour tout réel x :

$$e^x = 10 \Leftrightarrow x = \ln 10.$$

La calculatrice donne $\ln 10 \approx 2{,}303$.

Remarque : Sur la calculatrice

La touche e^x donne des valeurs approchées : e^1 s'affiche $2{,}718281828$. On écrit donc $e \approx 2{,}718$, et jamais $e = 2{,}718$.

De même, $e^2 \approx 7{,}389$ et $e^{-1} \approx 0{,}368$. Dans un calcul exact, garde l'écriture e^2 jusqu'au bout.

Variations, équations et inéquations

Comparer deux exponentielles

Devine : Deux petites exponentielles

Sans calculatrice, compare e^{-3} et e^{-2}.

A. $e^{-3} < e^{-2}$

Juste.

Juste : $-3 < -2$, et la courbe de l'exponentielle monte.

B. $e^{-3} > e^{-2}$

Faux.

Ce serait vrai pour une fonction décroissante ; or la courbe de l'exponentielle monte.

C. $e^{-3} = e^{-2}$

Faux.

La calculatrice affiche deux valeurs différentes : environ $0{,}050$ et $0{,}135$.

D. On ne peut pas comparer.

Faux.

On le peut : l'ordre des exposants donne l'ordre des exponentielles.

Correction

La courbe de l'exponentielle, symétrique de celle de $\ln$, monte de gauche à droite. Comme $-3 < -2$, on a donc $e^{-3} < e^{-2}$.

La calculatrice le confirme : $e^{-3} \approx 0{,}050$ et $e^{-2} \approx 0{,}135$.

Pourquoi est-ce vrai ? L'exponentielle est la réciproque de $\ln$, qui est continue et strictement croissante.

Le théorème de la fonction réciproque, admis, transmet ces deux qualités à l'exponentielle. Les équivalences en découlent par un raisonnement par l'absurde.

Une fonction strictement croissante

Propriété : Continuité, sens de variation et comparaison

La fonction $x \mapsto e^x$ est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b, \qquad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b, \qquad e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b.$$

En particulier, $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, et $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Démonstration

Étape 1. La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$. D'après le théorème de la fonction réciproque (admis), sa réciproque $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante, de même sens que $\ln$.

Étape 2. Si $a < b$, la stricte croissance donne $e^a < e^b$. Réciproquement, supposons $e^a < e^b$: si l'on avait $a \geq b$, on aurait $e^a \geq e^b$, ce qui est faux ; donc $a < b$.

Étape 3. Si $e^a = e^b$, alors ni $a < b$ ni $b < a$ d'après l'étape 2, donc $a = b$. Réciproquement, si $a = b$, alors $e^a = e^b$. L'équivalence avec $\leq$ réunit les deux cas.

Étape 4. Comme $e^0 = 1$ (exponentielle et logarithme), l'étape 2 avec $a = 0$ et $b = x$ donne $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$; avec $a = x$ et $b = 0$, elle donne $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La continuité et la croissance viennent de $\ln$, par le théorème de la fonction réciproque.

Pour remonter de $e^a < e^b$ à $a < b$, on raisonne par l'absurde : si $a \geq b$, la croissance donnerait $e^a \geq e^b$.

L'égalité s'obtient en écartant les deux inégalités strictes.

Vérifie : Le sens réciproque

Dans la preuve, comment passe-t-on de $e^a < e^b$ à $a < b$?

A. On suppose $a \geq b$ et on obtient $e^a \geq e^b$, ce qui est faux.

Juste.

Juste : c'est un raisonnement par l'absurde, fondé sur la croissance.

B. On dérive les deux membres de l'inégalité.

Faux.

Dériver ne conserve pas une inégalité entre deux nombres, et la preuve n'emploie aucune dérivée.

C. On utilise seulement $e^0 = 1$.

Faux.

Cette valeur ne sert qu'à l'étape 4, pour comparer à un.

D. On ajoute e^b aux deux membres.

Faux.

Ajouter un même nombre conserve l'inégalité, mais ne fait pas disparaître l'exponentielle.

Correction

Supposons $e^a < e^b$. Si l'on avait $a \geq b$, la croissance de l'exponentielle donnerait $e^a \geq e^b$, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $a < b$. C'est l'étape 2 de la preuve.

Exemple : comparer sans calculer

- On a $\sqrt{2} < 1{,}5$, car $2 < 2{,}25$. D'après la stricte croissance de l'exponentielle, $e^{\sqrt{2}} < e^{1{,}5}$.
- On a $-0{,}2 < 0$, donc $e^{-0{,}2} < e^0$, c'est-à-dire $e^{-0{,}2} < 1$.

Attention au sens. De $1 < 2$, on tire $-1 > -2$, puis $e^{-1} > e^{-2}$: l'expression e^{-x} diminue quand x augmente.

Résoudre une équation

Méthode : résoudre une équation exponentielle

1. **Délimite** l'ensemble des réels où l'équation a un sens : dénominateur non nul, logarithme d'un nombre strictement positif.
2. **Transforme** l'équation pour obtenir une exponentielle de chaque côté, $e^{u(x)} = e^{v(x)}$, ou une exponentielle égale à un réel k.
3. **Applique** la règle qui convient. L'égalité $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ équivaut à $u(x) = v(x)$. Pour $e^{u(x)} = k$: aucune solution si $k \leq 0$; si $k > 0$, elle équivaut à $u(x) = \ln k$.

4. **Résous**, puis ne garde que les solutions de l'ensemble trouvé au début.

Exemple : trois équations

Deux exponentielles. D'après la comparaison des exponentielles, l'équation $e^{2x-1} = e^{x+3}$ équivaut à $2x - 1 = x + 3$, soit $x = 4$. Donc $S = \{4\}$.

Un réel positif. Comme $5 > 0$, l'équation $e^{3x} = 5$ équivaut à $3x = \ln 5$, soit :

$$x = \frac{\ln 5}{3} \approx 0{,}536.$$

Un réel nul. Une exponentielle n'est jamais nulle : l'équation $e^{x+1} = 0$ n'a aucune solution. Donc $S = \varnothing$.

Attention : une exponentielle est strictement positive

✗ « $e^x = -4$, donc $x = \ln(-4)$. »

✓ Pour tout réel x, $e^x > 0$. L'équation $e^x = -4$ n'a donc aucune solution, et $\ln(-4)$ n'existe pas.

De la même manière, l'inéquation $e^{2x} > -1$ est vraie pour tout réel x : son ensemble de solutions est $\mathbb{R}$.

Résoudre une inéquation

Méthode : résoudre une inéquation exponentielle

1. **Écris** l'inéquation avec une exponentielle de chaque côté, $e^{u(x)} < e^{v(x)}$, ou avec une exponentielle et un réel k. Les symboles $\leq$, $>$ et $\geq$ se traitent de même.
2. **Compare les exposants.** L'exponentielle est strictement croissante : $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ équivaut à $u(x) < v(x)$, sans changer le sens.
3. **Face à un réel k.** Si $k \leq 0$, l'inéquation $e^{u(x)} > k$ est vraie pour tout x, et $e^{u(x)} < k$ n'a aucune solution. Si $k > 0$, on écrit $k = e^{\ln k}$: $e^{u(x)} < k$ équivaut à $u(x) < \ln k$.
4. **Conclus** par un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Exemple : trois inéquations

- D'après la stricte croissance de l'exponentielle, $e^{1-2x} \leq e^5$ équivaut à $1 - 2x \leq 5$, soit $x \geq -2$. Donc $S = [-2; +\infty[$.
- Comme $3 = e^{\ln 3}$, l'inéquation $e^x > 3$ équivaut à $e^x > e^{\ln 3}$, soit $x > \ln 3$. Donc $S =]\ln 3; +\infty[$.

- Une exponentielle est strictement positive : $e^{x+1} > -2$ est vraie pour tout réel x. Donc $S = \mathbb{R}$.

Vérifie : Une inéquation

Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-x} < 1$?

A. $]-\infty; 0[$

Faux.

Pour $x = -1$, $e^{1} \approx 2{,}718$ dépasse 1.

B. $]0; +\infty[$

Juste.

Juste : $e^{-x} < e^{0}$ équivaut à $-x < 0$, soit $x > 0$.

C. $\mathbb{R}$

Faux.

Pour $x = 0$, $e^{0} = 1$: l'inégalité stricte est fausse.

D. $\varnothing$

Faux.

Pour $x = 1$, $e^{-1} \approx 0{,}368$ est bien inférieur à 1.

Correction

On écrit $1 = e^{0}$. D'après la stricte croissance de l'exponentielle, $e^{-x} < e^{0}$ équivaut à $-x < 0$, c'est-à-dire $x > 0$.

Donc $S =]0; +\infty[$.

À toi : Une équation et une inéquation

Résous l'équation $e^{x^2} = e^{4x-3}$, puis l'inéquation $e^{2x+1} \geq 1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Compare les exposants : l'exponentielle est strictement croissante.

Indice 2

L'équation devient $x^2 = 4x - 3$, et l'inéquation $2x + 1 \geq 0$, car $1 = e^{0}$.

Indice 3

Point délicat : $x^2 - 4x + 3 = 0$ est du second degré ; cherche ses deux racines.

Réponse

Équation. D'après la comparaison des exponentielles, $e^{x^2} = e^{4x-3}$ équivaut à :

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Le discriminant vaut $16 - 12 = 4$. Les racines sont $\dfrac{4-2}{2} = 1$ et $\dfrac{4+2}{2} = 3$. Donc $S = \{1; 3\}$.

Inéquation. Comme $1 = e^0$, l'inéquation $e^{2x+1} \geq e^0$ équivaut à $2x + 1 \geq 0$, soit $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Donc $S = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

Le signe d'un produit

Un réflexe utile. Pour tout réel x, $e^x > 0$. Multiplier par e^x ne change donc pas un signe.

De plus, un produit $A(x)\,e^x$ est nul seulement si $A(x) = 0$, car e^x n'est jamais nul. Ce réflexe servira dans chaque étude de fonction.

Exemple : un signe et une équation produit

- Pour tout réel x, le produit $(x + 4)\,e^x$ a le signe de $x + 4$. Il est strictement négatif sur $]-\infty; -4[$, nul en -4 et strictement positif sur $]-4; +\infty[$.
- Pour tout réel x, $(2x - 5)\,e^x = 0$ équivaut à $2x - 5 = 0$, soit $x = \dfrac{5}{2}$.
- Pour tout réel x, $e^x + 1 > 1$: cette somme n'est jamais nulle.

Remarque : Coin examen : rédiger une inéquation

À l'examen, la rédaction nomme la propriété à chaque passage. Par exemple :

« La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc $e^{3x-2} < e^x$ équivaut à $3x - 2 < x$, c'est-à-dire $x < 1$. L'ensemble des solutions est $]-\infty; 1[$. »

Sans le nom de la propriété, le passage aux exposants n'est pas justifié.

Propriétés algébriques

Un produit d'exponentielles

Devine : Un produit à la calculatrice

La calculatrice donne $e^2 \approx 7{,}389$ et $e^3 \approx 20{,}086$. Leur produit vaut environ $148{,}41$. À quelle exponentielle est-il égal ?

A. e^6

Faux.
$e^6 \approx 403{,}4$: on a multiplié les exposants au lieu de les ajouter.

B. e^5

Juste.
Juste : $e^5 \approx 148{,}41$, et $2 + 3 = 5$.

C. e^1

Faux.
$e^1 \approx 2{,}718$: ce serait la différence des exposants.

D. $2e^5$

Faux.
$2e^5 \approx 296{,}8$, le double du produit.

Correction
La calculatrice donne $e^5 \approx 148{,}41$: les exposants s'ajoutent.

$$e^2 \times e^3 = e^{2+3} = e^5$$

Pour des exposants entiers, c'est la règle des puissances :

$$\begin{aligned} &e^2 \times e^3 \\ &= (e \times e) \times (e \times e \times e). \end{aligned}$$

La propriété qui suit l'étend à tous les réels.

Pourquoi est-ce vrai ? Le logarithme transforme un produit en somme. L'exponentielle, qui défait le logarithme, transforme donc une somme en produit.

La preuve calcule le logarithme de $e^a \times e^b$, puis revient par l'exponentielle.

Quatre règles de calcul

Propriété : Propriétés algébriques de l'exponentielle

Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \qquad (e^a)^n = e^{na}.$$

Démonstration

Étape 1. Le nombre $e^a \times e^b$ est strictement positif. D'après la propriété du logarithme d'un produit, puis la relation $\ln(e^x) = x$ (exponentielle et logarithme) :

$$\ln\left(e^a \times e^b\right) = \ln\left(e^a\right) + \ln\left(e^b\right) = a + b.$$

Donc, d'après la relation $e^{\ln y} = y$: $e^a \times e^b = e^{\ln\left(e^a e^b\right)} = e^{a+b}$.

Étape 2. Avec $b = -a$: $e^a \times e^{-a} = e^0 = 1$, donc $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

Étape 3. $e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$, par les étapes 1 et 2.

Étape 4. D'après la propriété $\ln(y^n) = n \ln y$ (pour $y > 0$, n entier relatif), $\ln\left((e^a)^n\right) = n \ln\left(e^a\right) = na$. Comme $(e^a)^n > 0$, la relation $e^{\ln y} = y$ donne $(e^a)^n = e^{na}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **passer par le logarithme**. Le nombre $e^a \times e^b$ est strictement positif, et son logarithme vaut $a + b$. La relation $e^{\ln y} = y$ ramène alors à e^{a+b}.

Les autres règles viennent de la première : $b = -a$ donne e^{-a}, puis $e^{a-b} = e^a \times e^{-b}$.

Vérifie : La propriété clé

Dans l'étape 1 de la preuve, quelle propriété du logarithme est employée ?

A. $\ln(a+b) = \ln a \times \ln b$

Faux.

Cette égalité est fausse : avec $a = b = 1$, le membre de gauche vaut $\ln 2$ et celui de droite 0.

B. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Faux.

Elle est juste, mais l'étape 1 traite un produit, et non un quotient.

C. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Juste.

Juste : c'est le logarithme d'un produit, appliqué à e^a et e^b.

D. $\ln 1 = 0$

Faux.

Elle ne sert pas à l'étape 1, qui traite un produit.

Correction

L'étape 1 applique la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ aux réels strictement positifs e^a et e^b. Avec $\ln\left(e^x\right) = x$, on obtient :

$$\ln\left(e^a \times e^b\right) = a + b.$$

Exemple : appliquer les quatre règles

Produit et quotient. Pour tout réel x :

$$e^{3x} \times e^{-x} = e^{3x-x} = e^{2x},$$

$$\begin{aligned} &\frac{e^{x+2}}{e^{x-1}} \\ &= e^{(x+2)-(x-1)} \\ &= e^3. \end{aligned}$$

Puissance. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \left(e^x\right)^3 \times e^{-2x} &= e^{3x} \times e^{-2x} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Un logarithme en exposant. On a $e^{-\ln 4} = \dfrac{1}{e^{\ln 4}} = \dfrac{1}{4}$, et :

$$\begin{aligned} e^{2\ln 3} &= \left(e^{\ln 3}\right)^2 \\ &= 3^2 = 9. \end{aligned}$$

Transformer une expression

En clair. Dans l'exposant :

- une somme devient un produit d'exponentielles ;
- une différence devient un quotient ;
- un exposant multiplié par n devient une puissance n-ième ;
- changer le signe de l'exposant, c'est passer à l'inverse.

Exemple : développer et factoriser

Développer. Pour tout réel x, d'après l'identité remarquable :

$$\begin{aligned} &(e^x + 1)^2 - e^{2x} \\ &= e^{2x} + 2e^x + 1 - e^{2x} \\ &= 2e^x + 1. \end{aligned}$$

Distribuer. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} e^x\left(e^{-x} - 1\right) &= e^{x-x} - e^x \\ &= 1 - e^x. \end{aligned}$$

Factoriser. On écrit $e^{2x} = e^x \times e^x$. Pour tout réel x :

$$e^{2x} - e^x = e^x\left(e^x - 1\right).$$

Attention : l'exponentielle d'une somme

✗ « $e^{x+2} = e^x + e^2$. »

✓ L'exponentielle d'une somme est un **produit** : pour tout réel x, $e^{x+2} = e^x \times e^2$.

Contrôle avec $x = 0$: $e^{0+2} = e^2 \approx 7{,}39$, alors que $e^0 + e^2 \approx 8{,}39$.

De même, $e^{3x} = \left(e^x\right)^3$, et non $3e^x$.

Trouve l'erreur : Un quotient à simplifier

Un élève écrit $\dfrac{e^{5x}}{e^x} = e^5$. Quelle est la bonne simplification ?

A. e^5

Faux.
L'élève a divisé les exposants ; un quotient d'exponentielles se traite par une différence.

B. e^{6x}

Faux.
Les exposants ont été ajoutés : c'est la règle du produit, pas celle du quotient.

C. 5

Faux.
Avec $x = 1$, le quotient vaut $e^4 \approx 54{,}6$, et non 5.

D. e^{4x}

Juste.
Juste : $e^{5x-x} = e^{4x}$.

Correction
D'après les propriétés algébriques, pour tout réel x :

$$\frac{e^{5x}}{e^{x}} = e^{5x-x} = e^{4x}.$$

Contrôle avec $x = 1$: $\dfrac{e^5}{e^1} = e^4$.

Valeurs exactes et rédaction

À toi : Deux transformations

Montre que, pour tout réel x, $\left(e^{x} - e^{-x}\right)^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$. Simplifie ensuite $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Développe avec l'identité $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
Indice 2
Calcule $\left(e^{x}\right)^2$, $e^{x} \times e^{-x}$ et $\left(e^{-x}\right)^2$ avec les règles de calcul.
Indice 3
Point délicat : $e^{x} \times e^{-x} = e^{0} = 1$, et non 0.

Réponse
Le carré. Soit x un réel. D'après l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, puis les propriétés algébriques :

$$\begin{aligned}
&\left(e^{x} - e^{-x}\right)^2 \\
&= \left(e^{x}\right)^2 - 2e^{x}e^{-x} \\
&\quad + \left(e^{-x}\right)^2 \\
&= e^{2x} - 2e^{0} + e^{-2x} \\
&= e^{2x} - 2 + e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Le quotient. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}\\&= e^{(2x+1)-(x-1)}\\&= e^{x+2}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité demandée est vraie pour tout réel x, et le quotient vaut e^{x+2}.

Exemple **: valeur exacte, puis valeur approchée**

Un quotient.

$$\begin{aligned}e^{\ln 5-1} &= \frac{e^{\ln 5}}{e^{1}}\\&= \frac{5}{e} \approx 1{,}839.\end{aligned}$$

Un produit.

$$\begin{aligned}e^{1+\ln 2} &= e \times e^{\ln 2}\\&= 2e \approx 5{,}437.\end{aligned}$$

Un logarithme. $\ln\left(e^3 \times e^{-1}\right) = \ln\left(e^2\right) = 2$.

Remarque **: Coin examen : montrer une égalité**

Pour montrer que deux écritures sont égales, on part de l'une et on arrive à l'autre. Par exemple, pour tout réel x :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur du premier quotient par e^{-x}, qui n'est pas nul. Comme $e^x \times e^{-x} = 1$, on obtient le second.

Second degré et systèmes

Reconnaître un carré

Devine : Une autre écriture

Pour tout réel x, à quoi e^{2x} est-il égal ?

A. $2e^x$

Faux.

Avec $x = 1$: $e^2 \approx 7{,}39$, alors que $2e \approx 5{,}44$.

B. e^{x^2}

Faux.

Avec $x = 1$: $e^1 \approx 2{,}72$, alors que $e^2 \approx 7{,}39$.

C. $(e^x)^2$

Juste.

Juste : $(e^x)^2 = e^{2x}$, d'après les propriétés algébriques.

D. $e^x + e^2$

Faux.

Avec $x = 0$: $e^0 = 1$, alors que $1 + e^2 \approx 8{,}39$.

Correction

D'après les propriétés algébriques de l'exponentielle, pour tout réel x :

$$(e^x)^2 = e^{2\times x} = e^{2x}.$$

Une équation où figurent e^{2x} et e^x est donc une équation du second degré en e^x.

L'idée. Dans $e^{2x} - 3e^x - 10 = 0$, l'inconnue x n'apparaît qu'à travers e^x.

On pose $X = e^x$. L'équation devient $X^2 - 3X - 10 = 0$, que tu sais résoudre depuis le tronc commun.

Une seule précaution : X est une exponentielle, donc $X > 0$.

Méthode : une équation qui se ramène au second degré

1. **Repère** les termes e^{2x} et e^x, et écris $e^{2x} = (e^x)^2$.
2. **Change d'inconnue** : pose $X = e^x$, en notant que $X > 0$. L'équation prend la forme $aX^2 + bX + c = 0$.
3. **Résous** cette équation du second degré avec le discriminant.
4. **Trie** les racines : seules les racines strictement positives conviennent. Pour chacune, $e^x = X$ donne $x = \ln X$.

Deux exemples guidés

Exemple : Exemple guidé : une racine rejetée

On résout $e^{2x} - 3e^x - 10 = 0$. On pose $X = e^x$, avec $X > 0$:

$$X^2 - 3X - 10 = 0.$$

Racines. Le discriminant vaut $\Delta = 9 + 40 = 49$. Les racines sont $X_1 = \dfrac{3 - 7}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{3 + 7}{2} = 5$.

Tri. La racine -2 est rejetée, car $X = e^x > 0$. Il reste $e^x = 5$, soit $x = \ln 5 \approx 1{,}609$.

Conclusion. $S = \{\ln 5\}$.

Exemple : une inéquation

On résout $e^{2x} - e^x - 2 < 0$. Avec $X = e^x$, on obtient $X^2 - X - 2 < 0$, soit :

$$(X - 2)(X + 1) < 0.$$

Comme $X > 0$, le facteur $X + 1$ est strictement positif. L'inéquation équivaut donc à $X - 2 < 0$, c'est-à-dire $e^x < 2$.

D'après la stricte croissance de l'exponentielle, cela équivaut à $x < \ln 2$. Donc $S =]-\infty ; \ln 2[$.

Vérifie : Trier les racines

L'équation $2e^{2x} + e^x - 1 = 0$ donne, avec $X = e^x$, les racines $X = \dfrac{1}{2}$ et $X = -1$. Quelles sont les solutions en x ?

A. $x = -\ln 2$ et $x = \ln(-1)$

Faux.
$\ln(-1)$ n'existe pas : la racine $X = -1$ est rejetée.

B. $x = -\ln 2$ seulement

Juste.
Juste : $e^x = \dfrac{1}{2}$ donne $x = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

C. Aucune solution

Faux.
La racine $X = \dfrac{1}{2}$ est strictement positive : elle donne une solution.

D. $x = \dfrac{1}{2}$ seulement

Faux.
$\dfrac{1}{2}$ est la valeur de X, et non celle de x : il reste à revenir à $x = \ln X$.

Correction

On vérifie que $2X^2 + X - 1 = (2X - 1)(X + 1)$, de racines $\dfrac{1}{2}$ et -1.

La racine -1 est rejetée, car $X = e^x > 0$. Il reste $e^x = \dfrac{1}{2}$, soit :

$$x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \approx -0{,}693.$$

Les systèmes exponentiels

Deux inconnues. Un système exponentiel se traite avec la même idée. On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$, avec $X > 0$ et $Y > 0$.

On obtient un système que tu sais résoudre. Les propriétés algébriques transforment e^{x+y} en XY, et e^{x-y} en $\dfrac{X}{Y}$.

Méthode : résoudre un système exponentiel

1. **Change d'inconnues** : pose $X = e^x$ et $Y = e^y$, en notant $X > 0$ et $Y > 0$.
2. **Réécris** chaque équation en X et Y, avec les propriétés algébriques si besoin.
3. **Résous** le nouveau système, par substitution ou par combinaison.
4. **Contrôle** les signes : un couple avec $X \leq 0$ ou $Y \leq 0$ est rejeté.
5. **Reviens** à x et y : $x = \ln X$ et $y = \ln Y$.

Exemple : Exemple guidé : un système à deux inconnues

On résout le système :

$$\begin{cases} e^x + 2e^y = 8 \\ 3e^x - e^y = 3 \end{cases}$$

Changement d'inconnues. Avec $X = e^x$ et $Y = e^y$, il devient $X + 2Y = 8$ et $3X - Y = 3$.

Substitution. La seconde équation donne $Y = 3X - 3$. On remplace dans la première : $X + 6X - 6 = 8$, donc $X = 2$, puis $Y = 3$.

Conclusion. Les deux valeurs sont strictement positives. Donc $x = \ln 2$ et $y = \ln 3$: le couple solution est $(\ln 2 ; \ln 3)$.

Un autre système

Exemple : un système où l'on passe aux logarithmes

Ici, chaque équation égale une exponentielle à un réel strictement positif : on prend directement les logarithmes.

On résout le système formé par $e^{x+y} = 12$ et $e^{x-y} = 3$. D'après l'équivalence de la définition, il équivaut à :

$$\begin{cases} x + y = \ln 12 \\ x - y = \ln 3 \end{cases}$$

En additionnant. $2x = \ln 12 + \ln 3 = \ln 36$, donc $x = \dfrac{\ln 36}{2} = \ln 6$.

En soustrayant. $2y = \ln 12 - \ln 3 = \ln 4$, donc $y = \ln 2$.

Remarque : un système sans solution

Le système formé par $e^x + e^y = 1$ et $e^x - e^y = 3$ donne $X + Y = 1$ et $X - Y = 3$. On trouve $X = 2$ et $Y = -1$.

Or $Y = e^y$ ne peut pas être négatif. Ce système n'a donc aucune solution.

À toi : Un système

Résous le système formé par $e^x + e^y = 9$ et $e^x - 2e^y = 3$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pose $X = e^x$ et $Y = e^y$: le système devient linéaire.
Indice 2
Soustrais la seconde équation de la première : $3Y = 6$.
Indice 3
Point délicat : vérifie que $X > 0$ et $Y > 0$ avant de revenir à x et y.

Réponse
En X et Y. Avec $X = e^x$ et $Y = e^y$, tous deux strictement positifs, le système devient $X + Y = 9$ et $X - 2Y = 3$.

Résolution. Par différence, $3Y = 6$, donc $Y = 2$, puis $X = 9 - 2 = 7$.

Retour à x et y. Les deux valeurs sont strictement positives. Donc $x = \ln 7$ et $y = \ln 2$.

Contrôle : $7 + 2 = 9$ et $7 - 2 \times 2 = 3$.

Remarque : Coin examen : rédiger le rejet d'une racine

À l'examen, le rejet d'une racine se justifie en une phrase. Par exemple, pour $e^{2x} - e^x - 6 = 0$:

« On pose $X = e^x$; on a $X > 0$. Les solutions de $X^2 - X - 6 = 0$ sont -2 et 3. Comme $X > 0$, on rejette -2. Donc $e^x = 3$, c'est-à-dire $x = \ln 3$. »

Dérivée et primitives

La pente en zéro

Devine : Une pente à la calculatrice

La calculatrice donne $\dfrac{e^{0,001} - 1}{0,001} \approx 1,0005$. Quelle est, d'après toi, la pente de la tangente à la courbe de l'exponentielle au point d'abscisse 0 ?

A. 0

Faux.

Une pente nulle donnerait une tangente horizontale ; or la courbe monte en ce point.

B. 1

Juste.

Juste : le taux d'accroissement s'approche de 1.

C. e

Faux.

$e \approx 2{,}718$ est loin de $1{,}0005$.

D. Il n'y a pas de tangente.

Faux.

La courbe n'a aucun angle en ce point : le taux d'accroissement a une limite.

Correction

Le quotient affiché est le taux d'accroissement de l'exponentielle entre 0 et $0{,}001$. Il vaut environ $1{,}0005$: la pente de la tangente en 0 semble égale à 1.

La propriété qui suit le confirme, car $e^0 = 1$.

Pourquoi est-ce vrai ? Rappel du chapitre de la dérivation : soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle, dérivable, de dérivée qui ne s'annule pas. Alors la réciproque de f est dérivable.

Sa dérivée en un point est l'inverse de la dérivée de f au point correspondant.

Ici, $\ln$ est continue, strictement croissante et dérivable sur $]0;+\infty[$. Sa dérivée $y \mapsto \dfrac{1}{y}$ ne s'annule jamais.

Dérivée de l'exponentielle

Propriété : Dérivée de la fonction exponentielle

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$(e^x)' = e^x.$$

Démonstration

Étape 1. La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, dérivable sur cet intervalle, et sa dérivée $y \mapsto \dfrac{1}{y}$ ne s'annule pas.

Étape 2. D'après le théorème de dérivation de la fonction réciproque, $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, en posant $y = e^x$:

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(y)} = \frac{1}{\dfrac{1}{e^x}} = e^x.$$

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La dérivée d'une réciproque est l'**inverse** de la dérivée de départ.

Au point $y = e^x$, la dérivée de $\ln$ vaut $\dfrac{1}{e^x}$. Son inverse est e^x : l'exponentielle est sa propre dérivée.

Vérifie : Une hypothèse de la preuve

Pourquoi la preuve vérifie-t-elle que la dérivée de $\ln$ ne s'annule pas ?

A. Pour que $\ln$ soit continue.

Faux.
La continuité de la fonction logarithme est déjà connue ; ce n'est pas le rôle de cette vérification.

B. Pour que e^x soit positif.

Faux.
La positivité de l'exponentielle vient de la définition, et non de la dérivée du logarithme.

C. Pour obtenir $\ln 1 = 0$.

Faux.
Cette valeur ne joue aucun rôle dans la preuve.

D. Sinon, on diviserait par 0.

Juste.
Juste : la preuve divise par $\ln'(y)$, qui doit être non nul.

Correction

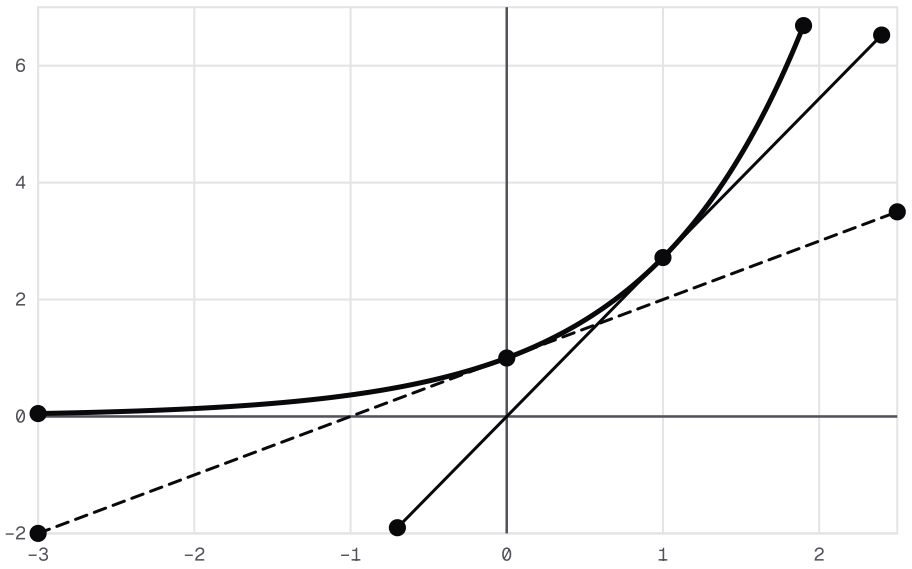
Le théorème de dérivation de la fonction réciproque donne, avec $y = e^x$:

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(y)}.$$

Ce quotient n'a de sens que si $\ln'(y) \neq 0$. Or $\ln'(y) = \dfrac{1}{y}$ ne s'annule jamais.

Exemple : tangentes à la courbe de l'exponentielle

- **En 0.** On a $e^0 = 1$, et la pente vaut $e^0 = 1$. La tangente a pour équation $y = x + 1$.
- **En 1.** La tangente a pour équation $y = e(x - 1) + e$, c'est-à-dire $y = ex$. Elle passe par l'origine.
- **Une différence.** La fonction $x \mapsto 2e^x - x$ a pour dérivée $x \mapsto 2e^x - 1$.



Les deux tangentes de l'exemple : y = x + 1 au point d'abscisse 0 et y = ex au point d'abscisse 1.

Une exponentielle composée

Pourquoi est-ce vrai ? La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ applique d'abord u, puis l'exponentielle.

Rappel : la dérivée de $x \mapsto v(u(x))$ est $x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$. Avec $v = \exp$, on a $v' = \exp$.

Propriété : Dérivée de x ↦ e^(u(x)) et primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout x de I,

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}.$$

Par conséquent, les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + C$, où C est un réel. En particulier, les primitives de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^x + C$.

Démonstration

Étape 1. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est la composée de u, dérivable sur I, suivie de $\exp$, dérivable sur $\mathbb{R}$ (dérivée de la fonction exponentielle).

Étape 2. D'après la formule de dérivation d'une fonction composée, pour tout x de I : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times \exp'\left(u(x)\right) = u'(x)\, e^{u(x)}$.

Étape 3. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est donc une primitive de $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ sur I ; les autres primitives s'en déduisent en ajoutant une constante. Le cas $u(x) = x$ donne les primitives de $x \mapsto e^x$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : reconnaître une **composée**, puis appliquer la formule de dérivation d'une composée avec $v = \exp$.

Lue à l'envers, la formule donne une primitive. La dérivée de e^u est $u'e^u$: donc e^u est une primitive de $u'e^u$.

Vérifie : Lire la formule à l'envers

Dans l'étape 3, pourquoi $x \mapsto e^{u(x)}$ est-elle une primitive de $x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$?

A. Car $e^{u(x)}$ est strictement positif.
Faux.
La positivité ne dit rien sur la dérivée.

B. Car u est dérivable sur I.
Faux.
C'est une hypothèse nécessaire, mais elle ne suffit pas : il faut connaître la dérivée.

C. Car sa dérivée est $x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$.
Juste.
Juste : c'est la définition d'une primitive.

D. Car $u'(x) = 1$ pour tout x.
Faux.
C'est seulement le cas où u est la fonction $x \mapsto x$; la propriété vaut pour tout u dérivable.

Correction
Une primitive d'une fonction g sur I est une fonction dont la dérivée est g.

L'étape 2 montre que la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ est $x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$. C'est donc une primitive ; les autres s'obtiennent en ajoutant une constante.

Exemple : dériver, puis trouver une primitive

Dérivées. Pour tout réel x :

- $\left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$, avec $u : x \mapsto -2x$;
- $\left(e^{x^2-x}\right)' = (2x-1)\,e^{x^2-x}$, avec $u : x \mapsto x^2 - x$.

Primitives. Une primitive de $x \mapsto e^{4x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}e^{4x}$, car la dérivée de $\frac{1}{4}e^{4x}$ vaut $\frac{1}{4} \times 4e^{4x}$.

De même, une primitive de $x \mapsto x\,e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$.

Un piège, puis à toi

Attention : ne pas oublier la dérivée de u

✗ « La dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto e^{-x}$. »

✓ Avec $u : x \mapsto -x$, on a $u'(x) = -1$. D'après la dérivée de e^u, la dérivée est $x \mapsto -e^{-x}$.

De même, la dérivée de $x \mapsto e^{x^2+1}$ est $x \mapsto 2x\,e^{x^2+1}$. Oublier u', c'est dériver comme si u était la fonction $x \mapsto x$.

Trouve l'erreur : Une dérivée à corriger

Quelle est la dérivée de $x \mapsto e^{1-x^2}$?

A. $x \mapsto e^{1-x^2}$

Faux.
Le facteur $u'(x) = -2x$ a été oublié.

B. $x \mapsto -2x\,e^{-2x}$

Faux.
L'exposant ne change pas : on garde e^{1-x^2}.

C. $x \mapsto (1-x^2)\,e^{-x^2}$

Faux.
Ce n'est pas la règle de la dérivée de e^u : l'exposant ne descend pas devant.

D. $x \mapsto -2x\,e^{1-x^2}$

Juste.
Juste : $u'(x) = -2x$ multiplie l'exponentielle.

Correction
Avec $u : x \mapsto 1 - x^2$, on a $u'(x) = -2x$.

D'après la dérivée de e^u, la dérivée est $x \mapsto -2x\,e^{1-x^2}$.

À toi : Une dérivée et une primitive

Dérive $x \mapsto (2x+1)\,e^{-x}$. Trouve ensuite une primitive de $x \mapsto (2x-3)\,e^{x^2-3x}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour la première, utilise la dérivée d'un produit.
Indice 2
La dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$. Pour la seconde, cherche u dont la dérivée est $x \mapsto 2x - 3$.
Indice 3
Point délicat : factorise par e^{-x} à la fin, sans oublier le signe moins.

Réponse

Dérivée. Notons g la fonction $x \mapsto (2x+1)\,e^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée d'un produit et celle de e^u, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{-x} \\ &\quad + (2x+1)\left(-e^{-x}\right) \\ &= (2 - 2x - 1)\,e^{-x} \\ &= (1-2x)\,e^{-x}. \end{aligned}$$

Primitive. Avec $u : x \mapsto x^2 - 3x$, on a $u'(x) = 2x - 3$. La fonction proposée s'écrit donc $x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$, et une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto e^{x^2-3x}$.

Exemple : une primitive avec une condition

On cherche la primitive F de $x \mapsto e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.

Les primitives. Ce sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$, où C est un réel.

La condition. $F(0) = 0$ donne $\dfrac{1}{2}e^{0} + C = 0$, soit $C = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2}$.

Limites et croissances comparées

Aux deux bornes

Devine : Très loin à gauche

La calculatrice donne $e^{-5} \approx 0{,}0067$, $e^{-10} \approx 0{,}000045$ et $e^{-20} \approx 0{,}000000002$. Que devient e^x quand x tend vers $-\infty$?

A. Il devient négatif.

Faux.

Une exponentielle est toujours strictement positive.

B. Il tend vers $-\infty$.

Faux.

Il reste positif : il ne peut pas descendre sous zéro.

C. Il tend vers 0.

Juste.

Juste : il s'approche de zéro, en restant strictement positif.

D. Il reste proche de 1.

Faux.

e^{-5} est déjà bien plus petit que 1.

Correction

Les valeurs sont strictement positives et de plus en plus proches de 0.

Quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0 par valeurs positives. La propriété suivante le confirme.

En clair. Pense aux deux courbes symétriques. Quand y tend vers 0 par valeurs positives, $\ln y$ tend vers $-\infty$.

En échangeant les axes : quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0.

De même, $\ln y$ tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$, donc e^x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Propriété : Limites de l'exponentielle aux bornes

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de $x \mapsto e^x$ au voisinage de $-\infty$.

Démonstration

Idée de la preuve. La courbe de $\exp$ est la symétrique de la courbe de $\ln$ par rapport à la droite d'équation $y = x$, car $\exp$ est la réciproque de $\ln$. Or $\ln y$ tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$, et vers $-\infty$ quand y tend vers 0 par valeurs positives (limites du logarithme). D'après la stricte croissance de l'exponentielle et la relation $e^{\ln y} = y$, e^x dépasse tout réel $A > 0$ dès que $x > \ln A$, et reste compris entre 0 et tout réel $\varepsilon > 0$ dès que $x < \ln \varepsilon$. La rédaction de ces deux passages, qui demande la définition d'une limite, est omise ici.

Remarque : Ce que l'esquisse omet

La preuve donnée est une idée de preuve.

D'après la stricte croissance de l'exponentielle et la relation $e^{\ln y} = y$, e^x dépasse tout réel $A > 0$ dès que $x > \ln A$. De même, e^x reste entre 0 et tout réel $\varepsilon > 0$ dès que $x < \ln \varepsilon$.

Pour en déduire les deux limites, il faut la définition d'une limite, que ce cours ne présente pas. Ce passage n'est pas rédigé ici.

Exemple : composer avec les limites aux bornes

Composer. Quand x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$. D'après les limites de l'exponentielle aux bornes :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

Une asymptote. D'après les mêmes limites :

$$\lim_{x \to -\infty} (e^x + 3) = 3.$$

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe de $x \mapsto e^x + 3$ en $-\infty$.

Un seuil. Pour $A = 1\,000$: $e^x > 1\,000$ dès que $x > \ln 1\,000 \approx 6{,}91$.

Qui l'emporte ?

Devine : Une course entre deux fonctions

Compare e^x et x^3 pour $x = 5$, 10 et 20. La calculatrice donne $e^5 \approx 148$, $e^{10} \approx 22\,026$ et $e^{20} \approx 4{,}85 \times 10^8$. Que devient $\dfrac{e^x}{x^3}$ quand x tend vers $+\infty$?

A. Il tend vers 0.

Faux.

C'est l'inverse : e^{20} est environ $60\,000$ fois plus grand que $20^3 = 8\,000$.

B. Il tend vers 1.

Faux.

Les deux nombres ne restent pas comparables : leur quotient grandit.

C. Il tend vers $+\infty$.

Juste.

Juste : l'exponentielle l'emporte sur la puissance.

D. On ne peut pas savoir.

Faux.

Les croissances comparées tranchent cette forme indéterminée.

Correction

Les quotients valent environ $1{,}19$, puis 22, puis $60\,646$: ils grandissent sans limite.

Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^x}{x^3}$ tend vers $+\infty$: c'est un cas des croissances comparées.

Propriété : Croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0.$$

Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

Démonstration

Idée de la preuve. **Première limite.** Pour $x > 0$, posons $X = e^x$: alors $x = \ln X$ et $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{X}{\ln X}$. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$; or $\dfrac{\ln X}{X}$ tend vers 0 par valeurs positives (limites du logarithme), donc son inverse tend vers $+\infty$. **Deuxième limite.** Posons $t = -x$: $x\,e^x = -\dfrac{t}{e^t}$, et $\dfrac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$; son inverse $\dfrac{t}{e^t}$ tend donc vers 0, et $x\,e^x$ aussi. **Cas général.** On écrit $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n$ grâce aux propriétés algébriques. Avec $t = -x$, on écrit $x^n e^x = (-1)^n \dfrac{t^n}{e^t}$, inverse au signe près d'un quotient qui tend vers $+\infty$. Le passage à la limite par ces changements de variable (limite d'une fonction composée) et le détail du cas général sont omis.

Remarque : Ce que l'esquisse omet

L'idée de la preuve ramène l'exponentielle au logarithme, par les changements de variable $X = e^x$ et $t = -x$.

Deux points ne sont pas rédigés : le passage à la limite par ces changements de variable, et le cas d'une puissance n quelconque.

Pour ce cas, l'esquisse écrit seulement $x^n e^x$, au signe près, comme l'inverse de $\dfrac{e^t}{t^n}$. La limite de $x^n e^x$ en $-\infty$ n'est donc pas démontrée en détail.

Retiens les quatre limites : elles servent dans les études de fonctions.

Exemple : utiliser les croissances comparées

Deux limites directes. D'après les croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0.$$

Un inverse. Pour $x > 0$, $x\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ est l'inverse de $\dfrac{e^x}{x}$, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Donc $\lim_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$.

Développer. Pour tout réel x, $(x+2)\,e^x = x\,e^x + 2e^x$. En $-\infty$, les deux termes tendent vers 0, donc $\lim_{x \to -\infty} (x+2)\,e^x = 0$.

Une limite en zéro

Pourquoi est-ce vrai ? Le quotient $\dfrac{e^x - 1}{x}$ est le taux d'accroissement de l'exponentielle entre 0 et x.

Rappel : quand x tend vers 0, un taux d'accroissement tend vers le nombre dérivé. Tu as déjà approché ce nombre à la calculatrice, dans la section sur la dérivée.

Propriété : Limite de (e^x – 1)/x en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Démonstration

Étape 1. La fonction $\exp$ est dérivable en 0 et $\exp'(0) = e^0 = 1$ (dérivée de la fonction exponentielle, puis $e^0 = 1$).

Étape 2. Par définition du nombre dérivé en 0, le taux d'accroissement $\dfrac{e^x - e^0}{x - 0}$ tend vers $\exp'(0)$ quand x tend vers 0.

Étape 3. Comme $e^0 = 1$, ce taux s'écrit $\dfrac{e^x - 1}{x}$; sa limite en 0 est donc 1.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **reconnaître un taux d'accroissement**. Comme $e^0 = 1$, pour tout réel $x \neq 0$:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}.$$

Sa limite en 0 est le nombre dérivé de l'exponentielle en 0, soit $e^0 = 1$.

La dérivée de l'exponentielle vient avant cette limite, jamais après.

Vérifie : Le nombre dérivé reconnu

Dans la preuve, quel nombre dérivé reconnaît-on ?

A. Le nombre dérivé de $\ln$ en 1.

Faux.
Il vaut aussi un, mais la preuve étudie l'exponentielle, et non le logarithme.

B. Le nombre dérivé de $\exp$ en 0.

Juste.
Juste : le quotient est le taux d'accroissement de $\exp$ en 0.

C. Le nombre dérivé de $\exp$ en 1.

Faux.
Il vaut e ; le quotient compare e^x à e^0, et non à e^1.

D. Le nombre dérivé de $x \mapsto x$ en 0.

Faux.
Le numérateur contient e^x : c'est l'exponentielle qui est dérivée.

Correction

Comme $e^0 = 1$, le quotient s'écrit $\dfrac{e^x - e^0}{x - 0}$: c'est le taux d'accroissement de $\exp$ entre 0 et x.

D'après la définition du nombre dérivé, il tend vers $\exp'(0) = e^0 = 1$.

Exemple : un changement de variable

Faire apparaître le taux. Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\frac{e^{3x} - 1}{x} = 3 \times \frac{e^{3x} - 1}{3x}.$$

Quand x tend vers 0, $t = 3x$ tend vers 0. D'après la limite de $\dfrac{e^t - 1}{t}$ en 0, la limite vaut $3 \times 1 = 3$.

De même. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{e^x - 1}{2x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{e^x - 1}{x}$. Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

Méthode et piège

Méthode : calculer une limite avec l'exponentielle

1. **Cherche** la limite de chaque morceau, et regarde la forme obtenue.
2. **Forme déterminée** : conclus par les opérations sur les limites.
3. **Forme indéterminée** : en $+\infty$, factorise par le terme qui l'emporte (e^x, ou une puissance x^n en faisant apparaître $\dfrac{e^x}{x^n}$). En $-\infty$, développe pour faire apparaître des termes $x^n e^x$, qui tendent vers 0 d'après les croissances comparées.
4. **Cite** la limite de référence employée : limites aux bornes, croissances comparées ou limite de $\dfrac{e^x - 1}{x}$ en 0.

Attention : une forme indéterminée ne se devine pas

✗ « En $+\infty$, $e^x - x^2$ tend vers $+\infty - (+\infty) = 0$. »

✓ $+\infty - (+\infty)$ est une forme indéterminée. On factorise par e^x : pour tout réel x,

$$e^x - x^2 = e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right).$$

D'après les croissances comparées, $\dfrac{x^2}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$. Donc $e^x - x^2$ tend vers $+\infty$. Pour $x = 10$, il vaut déjà environ $21\,926$.

À toi : Deux limites

Calcule $\lim_{x\to+\infty}(e^x-3x)$ et $\lim_{x\to-\infty}(x-1)\,e^x$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Repère la forme de chaque limite avant de calculer.
Indice 2
En $+\infty$, factorise par e^x. En $-\infty$, développe : $(x-1)\,e^x = x\,e^x - e^x$.
Indice 3
Point délicat : en $-\infty$, la forme $(-\infty)\times 0$ de $x\,e^x$ se lève par les croissances comparées.

Réponse
En $+\infty$. La forme est $+\infty-(+\infty)$. Pour tout réel x :

$$e^x-3x = e^x\left(1-\frac{3x}{e^x}\right).$$

D'après les croissances comparées, $\dfrac{x}{e^x}$ tend vers 0, donc la parenthèse tend vers 1. Par produit, $\lim_{x\to+\infty}(e^x-3x)=+\infty$.

En $-\infty$. Pour tout réel x, $(x-1)\,e^x = x\,e^x - e^x$. D'après les croissances comparées, $x\,e^x$ tend vers 0 ; d'après les limites aux bornes, e^x aussi.

Donc $\lim_{x\to-\infty}(x-1)\,e^x=0$.

Étudier une fonction avec une exponentielle

Observer avant d'étudier

Devine : Une forme à deviner

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-x)e^x$. La calculatrice donne $f(0)=3$, $f(1)\approx 5{,}44$, $f(2)\approx 7{,}39$ et $f(3)=0$. Sur $[0;3]$, comment varie f, d'après ces valeurs ?

A. Elle est croissante.

Faux.
$f(3)=0$ est plus petit que $f(2)$: elle redescend.

B. Elle est décroissante.

Faux.
$f(1)$ dépasse $f(0)$: elle monte d'abord.

C. Elle monte, puis elle descend.

Juste.
Juste : les valeurs montent jusqu'à $x=2$ environ, puis redescendent.

D. Elle est constante.

Faux.
Les valeurs changent d'un point à l'autre.

Correction

> Les valeurs montent de 3 à environ $7{,}39$, puis redescendent à 0. La fonction semble croître, puis décroître, avec un maximum près de $x = 2$.
>
> Quatre valeurs ne prouvent rien : l'étude par la dérivée va le confirmer.

Le plan. Pour étudier f, on suit quatre étapes :

1. chercher les limites aux bornes de $\mathbb{R}$;
2. calculer la dérivée et étudier son signe ;
3. dresser le tableau de variations ;
4. tracer la courbe, avec une tangente.

Méthode : étudier une fonction qui comporte une exponentielle

1. **Dérive** avec la règle $(e^u)' = u'e^u$, et les règles du produit ou du quotient.
2. **Mets** $e^{u(x)}$ **en facteur** dans la dérivée : ce facteur est strictement positif.
3. **Étudie le signe** de l'autre facteur seulement : c'est le signe de la dérivée, intervalle par intervalle.
4. **Dresse** le tableau de variations, en y reportant les limites aux bornes et les valeurs remarquables.

Les limites aux bornes

> **Vérifie : La limite de référence**
>
> En $-\infty$, on écrit $f(x) = 3e^x - x\,e^x$. Quelle limite de référence lève la forme indéterminée ?
>
> **A.** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
> **Faux.**
> Elle concerne $+\infty$, et non $-\infty$.
>
> **B.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
> **Faux.**
> Elle concerne une limite en 0.
>
> **C.** $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
> **Faux.**
> Elle concerne $+\infty$; en $-\infty$, e^x tend vers 0.
>
> **D.** $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$
> **Juste.**
> Juste : c'est une croissance comparée en $-\infty$.

Correction

En $-\infty$, $x\,e^x$ est du type $(-\infty)\times 0$: c'est une forme indéterminée.

Les croissances comparées la lèvent : $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$.

Exemple : Étape 1 : les limites

En $-\infty$. Pour tout réel x, on a $f(x) = 3e^x - x\,e^x$. D'après les limites aux bornes, $3e^x$ tend vers 0. D'après les croissances comparées, $x\,e^x$ tend vers 0.

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

En $+\infty$. $3 - x$ tend vers $-\infty$ et e^x tend vers $+\infty$. Par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Dérivée et variations

Exemple : Étape 2 : la dérivée et son signe

D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^x + (3-x)e^x \\ &= (2-x)e^x. \end{aligned}$$

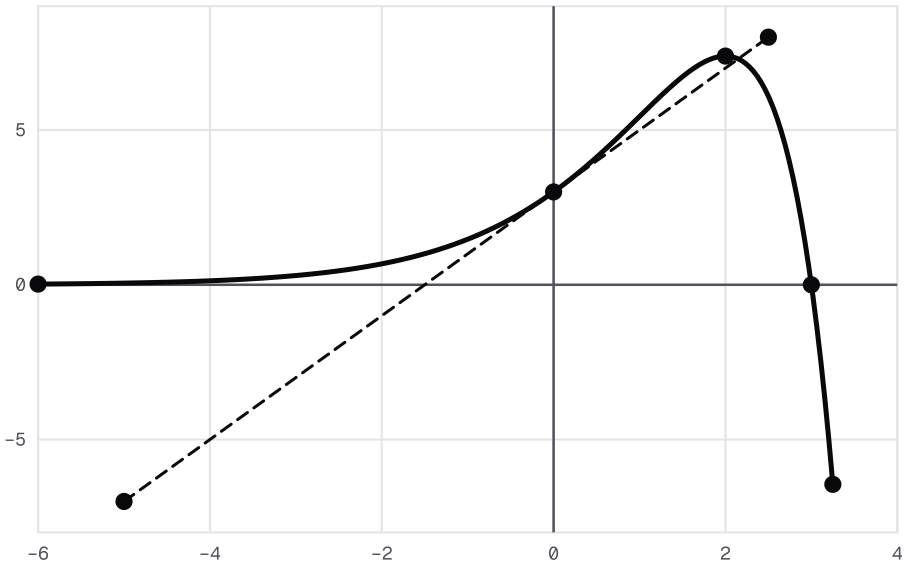
Signe. Pour tout réel x, $e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2 - x$.

- Sur $]-\infty;2[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty;2]$.
- Sur $]2;+\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.

Maximum. Le maximum vaut $f(2) = e^2 \approx 7{,}39$.

Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	e^2	↘	$-\infty$



Courbe de la fonction f, avec sa tangente au point d'abscisse 0.

Tangente et rédaction

Exemple : Étape 3 : une tangente et le signe de f

- **Tangente en 0.** $f(0) = 3$ et $f'(0) = (2 - 0)e^0 = 2$. La tangente a pour équation $y = 2x + 3$.
- **Axe des abscisses.** Pour tout réel x, $f(x) = 0$ équivaut à $3 - x = 0$, car $e^x \neq 0$. La courbe coupe l'axe des abscisses au seul point d'abscisse 3.
- **Signe de f.** $f(x)$ a le signe de $3 - x$: f est strictement positive sur $]-\infty; 3[$ et strictement négative sur $]3; +\infty[$.

Exemple : un minimum pour prouver une inégalité

On montre que $e^x > x$ pour tout réel x. On étudie la fonction $g : x \mapsto e^x - x$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. D'après la dérivée de l'exponentielle, pour tout réel x, $g'(x) = e^x - 1$.

Signe. Comme $e^0 = 1$, la stricte croissance de l'exponentielle donne $g'(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $g'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Variations. Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Son minimum vaut $g(0) = 1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $g(x) \geq 1 > 0$, donc $e^x > x$.

À toi : Une autre tangente, une primitive

Donne une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3. Montre ensuite que $x \mapsto (4-x)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Indice 2
Calcule $f(3)$ et $f'(3) = (2-3)e^3$. Pour la primitive, dérive $x \mapsto (4-x)e^x$.
Indice 3
Point délicat : $f'(3) = -e^3$ est négatif ; garde la valeur exacte, sans arrondir.

Réponse
Tangente. On a $f(3) = 0$ et $f'(3) = (2-3)e^3 = -e^3$. La tangente au point d'abscisse 3 a pour équation $y = -e^3(x-3)$, c'est-à-dire :

$$y = -e^3 x + 3e^3.$$

Primitive. D'après la dérivée d'un produit, la dérivée de $x \mapsto (4-x)e^x$ est, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &-e^x + (4-x)e^x \\ &= (3-x)e^x. \end{aligned}$$

On retrouve $f(x)$. La fonction $x \mapsto (4-x)e^x$ est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Coin examen : rédiger les variations

À l'examen, on écrit :

« Pour tout réel x, $f'(x) = (2-x)e^x$. Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2-x$. Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty;2[$ et $f'(x) < 0$ sur $]2;+\infty[$. Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty;2]$ et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$. »

Chaque phrase nomme un signe et un intervalle.

Le mot du prof. Retiens le cœur de l'étude : mettre e^x en facteur dans la dérivée. Le signe se lit alors sur un facteur simple, ici $2-x$.

Tu viens de mener une étude complète, du calcul des limites jusqu'au tracé.

Dans un exercice, une telle fonction peut représenter le bénéfice fictif d'une entreprise selon la quantité produite : son maximum est alors le bénéfice maximal.

Fonction exponentielle de base a

Des abonnés qui se multiplient

Un service en ligne fictif lance une application. Il compte $3\,000$ abonnés au départ. Selon un modèle fictif, ce nombre est multiplié par $1{,}2$ par mois.

Après n mois, il vaut $3\,000 \times 1{,}2^n$. Mais que vaut-il après deux mois et demi ?

Il faut donner un sens à $1{,}2^x$ pour un réel x.

Devine : Deux mois plus tard

Combien le service compte-t-il d'abonnés après deux mois ?

A. $4\,200$

Faux.

On a ajouté 600 deux fois ; or le nombre est multiplié, et non augmenté d'une quantité fixe.

B. $4\,320$

Juste.

Juste : $3\,000 \times 1{,}2 \times 1{,}2 = 4\,320$.

C. $7\,200$

Faux.

On a multiplié par $2 \times 1{,}2 = 2{,}4$ au lieu de $1{,}2^2 = 1{,}44$.

D. $3\,600$

Faux.

C'est le nombre après un seul mois.

Correction

Après un mois : $3\,000 \times 1{,}2 = 3\,600$. Après deux mois : $3\,600 \times 1{,}2 = 4\,320$.

On a multiplié deux fois par $1{,}2$, soit par $1{,}2^2 = 1{,}44$.

Définition : Fonction exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x, on pose

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

La fonction $x \mapsto a^x$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée **fonction exponentielle de base** a. Pour $a = e$, on retrouve e^x car $\ln e = 1$; pour $a = 1$, on a $1^x = 1$ pour tout réel x.

Exemple : revenir à l'exponentielle

Base 2. Pour tout réel x, $2^x = e^{x \ln 2}$. Pour $x = 3$, on retrouve $e^{3 \ln 2} = e^{\ln 8} = 8 = 2^3$.

Les abonnés. Après deux mois et demi, le nombre d'abonnés vaut :

$$\begin{aligned} & 3\,000 \times 1{,}2^{2{,}5} \\ &= 3\,000\, e^{2{,}5 \ln 1{,}2} \\ &\approx 4\,732. \end{aligned}$$

Base $\frac{1}{2}$. Pour tout réel x : $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{x \ln \frac{1}{2}} = e^{-x \ln 2}$.

Les règles de calcul

Pourquoi est-ce vrai ? Tout se ramène à l'exponentielle népérienne. On écrit $a^x = e^{x \ln a}$, puis on applique ses règles connues :

- les propriétés algébriques ;
- la dérivée de e^u ;
- le lien entre le signe de la dérivée et les variations.

Propriété : Propriétés de la fonction exponentielle de base a

Soit a et b deux réels strictement positifs, et x et y deux réels.

- $a^x > 0$ et $\ln(a^x) = x \ln a$.
- $a^{x+y} = a^x\, a^y, \quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}, \quad (ab)^x = a^x\, b^x$.
- La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a^x)' = (\ln a)\, a^x$.
- Si $a > 1$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; si $0 < a < 1$, elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Étape 1. Par définition, $a^x = e^{x \ln a}$; d'après la relation entre exponentielle et logarithme, $a^x > 0$ et $\ln(a^x) = x \ln a$.

Étape 2. D'après les propriétés algébriques de l'exponentielle : $a^{x+y} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a}\, e^{y \ln a} = a^x a^y$. De même, $a^{-x} = e^{-x \ln a} = \dfrac{1}{e^{x \ln a}} = \dfrac{1}{a^x}$ et $a^{x-y} = a^x a^{-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$. Enfin $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, donc $(ab)^x = e^{x \ln a + x \ln b} = a^x b^x$.

Étape 3. Avec $u(x) = x \ln a$, on a $u'(x) = \ln a$; la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ donne $(a^x)' = (\ln a)\, a^x$.

Étape 4. Comme $a^x > 0$, cette dérivée a le signe de $\ln a$: strictement positive si $a > 1$, strictement négative si $0 < a < 1$; on conclut par le signe de la dérivée.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **réécrire a^x sous la forme $e^{x \ln a}$**. Les règles de calcul viennent alors de celles de l'exponentielle.

La dérivée vient de celle de e^u, avec $u : x \mapsto x \ln a$. Comme $a^x > 0$, le signe de la dérivée est celui de $\ln a$.

Vérifie : Le sens de variation

Pourquoi la fonction $x \mapsto 0{,}8^x$ est-elle strictement décroissante sur $\mathbb{R}$?

A. Car $0{,}8^x < 0$.

Faux.

Faux : $0{,}8^x = e^{x \ln 0{,}8}$ est strictement positif.

B. Car sa dérivée est $x \mapsto x \times 0{,}8^{x-1}$.

Faux.

C'est la règle de la puissance x^n, et non celle de a^x.

C. Car $\ln 0{,}8 < 0$.

Juste.

Juste : la dérivée $(\ln 0{,}8)\, 0{,}8^x$ est alors strictement négative.

D. Car $0{,}8 < 0$.

Faux.

Faux : $0{,}8$ est positif ; c'est $\ln 0{,}8$ qui est négatif.

Correction

Pour tout réel x, la dérivée de $x \mapsto 0{,}8^x$ en x vaut $(\ln 0{,}8)\, 0{,}8^x$.

Comme $0 < 0{,}8 < 1$, on a $\ln 0{,}8 < 0$. De plus, $0{,}8^x > 0$.

La dérivée est donc strictement négative sur $\mathbb{R}$: la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple : calculer avec une base a

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3^x \times 3^{2-x} &= 3^{x+2-x} \\ &= 3^2 = 9, \end{aligned}$$

$$\frac{5^{x+1}}{5^x} = 5,$$

$$2^x \times 5^x = 10^x.$$

Variations. La dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto (\ln 2)\, 2^x$. La fonction est strictement croissante, car $\ln 2 > 0$.

Le modèle des abonnés, $t \mapsto 3\,000 \times 1{,}2^t$, est strictement croissant, car $\ln 1{,}2 > 0$.

Les limites

Pourquoi est-ce vrai ? Avec $a^x = e^{x \ln a}$, tout dépend du signe de $\ln a$.

Si $\ln a > 0$, l'exposant $x \ln a$ suit x. Si $\ln a < 0$, il va en sens contraire. Les limites de l'exponentielle aux bornes concluent.

Propriété : Limites de la fonction exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif.

- Si $a > 1$: $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- Si $0 < a < 1$: $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Démonstration

Étape 1. On écrit $a^x = e^{x \ln a}$ et l'on pose $X = x \ln a$.

Étape 2. Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$: X tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$. Les limites de l'exponentielle aux bornes donnent $+\infty$ et 0, par la limite d'une fonction composée.

Étape 3. Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$: X tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$. On obtient de même 0 et $+\infty$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **poser** $X = x \ln a$, puis composer avec les limites de l'exponentielle aux bornes.

Le signe de $\ln a$ décide de la borne vers laquelle va X. Pour $0 < a < 1$, les rôles de $+\infty$ et de $-\infty$ s'échangent.

À toi : Deux limites d'une base inférieure à 1

Calcule $\lim_{x \to +\infty} 0{,}9^x$ et $\lim_{x \to -\infty} 0{,}9^x$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $0{,}9^x = e^{x \ln 0{,}9}$.
Indice 2
Cherche le signe de $\ln 0{,}9$: compare $0{,}9$ à 1.
Indice 3
Point délicat : $\ln 0{,}9 < 0$, donc $x \ln 0{,}9$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Réponse
On écrit $0{,}9^x = e^X$, avec $X = x \ln 0{,}9$. Comme $0 < 0{,}9 < 1$, on a $\ln 0{,}9 < 0$.

En $+\infty$. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $-\infty$. D'après les limites aux bornes et la limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x \to +\infty} 0{,}9^x = 0.$$

En $-\infty$. Quand x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$. Par les mêmes limites :

$$\lim_{x \to -\infty} 0{,}9^x = +\infty.$$

Exemple : le modèle des abonnés à long terme

Sans plafond. Comme $1{,}2 > 1$, $\lim_{t \to +\infty} 1{,}2^t = +\infty$. Dans ce modèle fictif, le nombre d'abonnés dépasse donc tout seuil.

Un seuil. Quand dépasse-t-il $10\,000$? On résout $3\,000 \times 1{,}2^t \geq 10\,000$, soit $1{,}2^t \geq \dfrac{10}{3}$.

On applique $\ln$, strictement croissante sur $]0;+\infty[$: $t \ln 1{,}2 \geq \ln \dfrac{10}{3}$. Comme $\ln 1{,}2 > 0$, on obtient :

$$t \geq \frac{\ln \frac{10}{3}}{\ln 1{,}2} \approx 6{,}60.$$

Le seuil est franchi pendant le septième mois.

Méthode et synthèse

Méthode : travailler avec une exponentielle de base a

1. **Réécris** $a^x = e^{x \ln a}$, avec $a > 0$.
2. **Équation** $a^x = b$, avec $b > 0$ et $a \neq 1$: applique $\ln$ aux deux membres. On obtient $x \ln a = \ln b$, donc $x = \dfrac{\ln b}{\ln a}$.
3. **Inéquation** : en divisant par $\ln a$, garde le sens si $a > 1$, change-le si $0 < a < 1$.
4. **Modèle** : une grandeur multipliée par $q > 0$ à chaque période s'écrit $Q(t) = Q_0\, q^t$, où Q_0 est la valeur de départ.

Attention : une base positive, et deux fonctions à ne pas confondre

✗ « La dérivée de $x \mapsto 3^x$ est $x \mapsto x \times 3^{x-1}$. »

✓ La fonction $x \mapsto 3^x$ est une exponentielle de base 3 : sa dérivée est $x \mapsto (\ln 3)\, 3^x$.

La règle $(x^n)' = n\, x^{n-1}$ concerne $x \mapsto x^3$, de dérivée $x \mapsto 3x^2$.

Enfin, l'écriture a^x exige $a > 0$: $(-3)^x$ n'a pas de sens ici, car $\ln(-3)$ n'existe pas.

Ce qu'il faut savoir faire.

- Passer de $y = e^x$ à $x = \ln y$, et simplifier $\ln\left(e^a\right)$ et $e^{\ln b}$.

- Résoudre une équation ou une inéquation exponentielle, en comparant les exposants.
- Poser $X = e^x$ pour une équation du second degré ou pour un système.
- Dériver e^u, mettre e^u en facteur et étudier le signe de l'autre facteur.
- Calculer une limite en nommant la limite de référence.
- Réécrire $a^x = e^{x \ln a}$ pour une grandeur multipliée par un même coefficient.

Le mot du prof. Tu sais maintenant défaire un logarithme et décrire une croissance par un coefficient multiplicateur. Ces outils reviendront dans chaque étude de fonction.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions exponentielles » (2bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)