BURHAN

Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2024

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/examens/2024-session-rattrapage

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2024	Session de rattrapage	Examen national	2h	4	20 pts (barème officiel)

Instructions au candidat(e)

Important : Le candidat est invité à lire et suivre attentivement ces recommandations.

Le document que vous avez entre les mains est de 4 pages :la première est réservée aux recommandations, les pages 2 et 3 sont réservées au sujet.

- Répondre aux questions du sujet avec précision et soin ;
- L'usage de la calculatrice scientifique non programmable est autorisé ;
- Vous devez justifier les résultats
- Vous pouvez répondre aux exercices selon l'ordre que vous choisissez, mais veuillez numéroter les exercices et les questions ;
- Veillez à la bonne présentation de votre copie et à une écriture lisible ;
- Il est souhaitable que les pages soient numérotées pour faciliter la correction ;
- Eviter l'écriture au stylo rouge ;
- Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

Exercice 1 — 5 pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 9}{u_n - 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. — 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2

INDICE

Appliquer la relation de récurrence avec $n = 0$, puis avec $n = 1$.

2.a. — 0,75 pts

Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 3$

INDICE

Exprimer $u_{n+1} - 3$ en fonction de u_n : on trouve $\dfrac{u_n - 3}{4 - u_n}$.

2.b. — 0,5 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 3)^2}{4 - u_n}$

INDICE

Réduire au même dénominateur, puis reconnaître une identité remarquable au numérateur.

2.c. — 0,25 pts

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

2.d. — 0,25 pts

Dire pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3.a. — 0,25 pts

3. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$

Calculer v_0

3.b. — 0,5 pts

Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{2u_n - 7}{u_n - 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

INDICE

Calculer séparément $u_{n+1} - 4$ et $u_{n+1} - 3$ en fonction de u_n, puis faire le quotient.

3.c. — 0,5 pts

En déduire que $v_{n+1} - v_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

3.d. — 0,5 pts

Montrer que $v_n = \dfrac{3}{2} + n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

4.a. 0,5 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{3v_n - 4}{v_n - 1}$

INDICE

Partir de $v_n(u_n - 3) = u_n - 4$ et isoler u_n.

4.b. 0,25 pts

En déduire que $u_n = \dfrac{6n + 1}{2n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

4.c. 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

INDICE

Mettre n en facteur au numérateur et au dénominateur.

Exercice 2 — 3 pts

(Les résultats seront données sous forme de fractions)

Pour passer un contrôle oral de mathématiques à ses élèves, un professeur prépare dix exercices de trois domaines comme suit : cinq en algèbre, trois en analyse et deux en géométrie.

Un élève choisit au hasard et simultanément 3 exercices pour passer le contrôle. Tous les exercices ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les événements suivants :

A : « Le choix de l'élève ne contient que des exercices d'algèbre »

B : « Le choix de l'élève contient un exercice de chaque domaine »

C : « Parmi les trois exercices choisis, il y'a un seul de géométrie »

1. 1 pts

Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{12}$

INDICE

Un tirage simultané de 3 exercices parmi 10 est une combinaison : il y en a C_{10}^{3}.

2. 1 pts

Calculer $p(B)$

3. 1 pts

Calculer $p(C)$

INDICE

Choisir l'exercice de géométrie, puis les deux autres parmi les 8 exercices qui ne sont pas de géométrie.

Exercice 3 — 4 pts

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln x$$

(C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. — 0,5 pts

Calculer $f\left(\sqrt{e}\right)$ et $g\left(\sqrt{e}\right)$

INDICE

$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$, donc $\ln\sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$.

2. — 0,5 pts

Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et (C_g)

3.a. — 1 pts

Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} g(x)\,dx = \frac{2-\sqrt{e}}{2}$ (On pourra utiliser une intégration par parties)

INDICE

Poser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = x$.

3.b. — 1 pts

Calculer $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} f(x)\,dx$

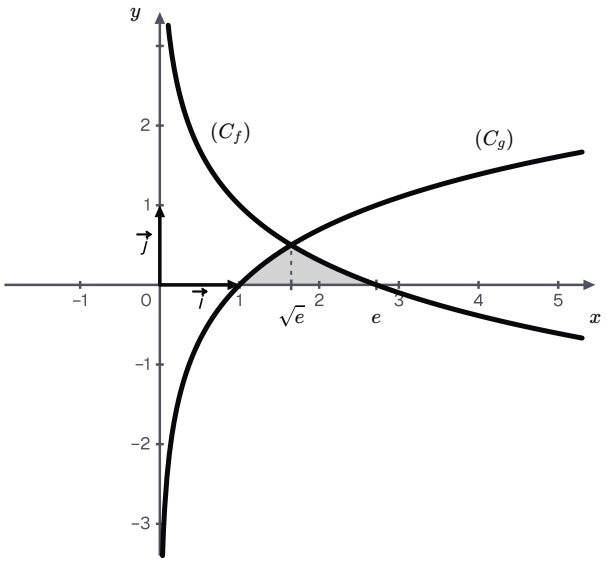
INDICE

Par linéarité, $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} f(x)\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} 1\,dx - \int_{\sqrt{e}}^{e} \ln x\,dx$; une primitive de $\ln$ est $x \mapsto x\ln x - x$ (même intégration par parties qu'en 3.a).

3.c. 1 pts

En déduire que l'aire A de la partie colorée est $A = (\sqrt{e} - 1)^2 \, u.a$

(On remarquera que $e - 2\sqrt{e} + 1 = (\sqrt{e} - 1)^2$)



Les courbes (Cf) et (Cg) de f et g dans un repère orthonormé, et la partie colorée.

INDICE

Découper la partie colorée en $x = \sqrt{e}$: à gauche, elle est sous (C_g) ; à droite, sous (C_f).

Exercice 4 — 8 pts

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$$

et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1.a. — 0,25 pts

Vérifier que $h(x) = \ln x\left((\ln x)^2 - 3\right)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

1.b. — 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

INDICE

Utiliser la forme factorisée de la question 1.a et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

1.c. — 1,25 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

(On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x} = 0$)

INDICE

Pour $\dfrac{h(x)}{x}$, écrire $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{(\ln x)^3}{x} - 3\times\dfrac{\ln x}{x}$.

2. — 1,5 pts

Vérifier que l'ensemble des solutions de l'équation : $h(x) = 0$ est $\left\{e^{-\sqrt{3}};1;e^{\sqrt{3}}\right\}$

INDICE

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ; puis $(\ln x)^2 = 3 \iff \ln x = \sqrt{3}$ ou $\ln x = -\sqrt{3}$.

3.a. — 1 pts

Montrer que $h'(x) = \dfrac{3}{x}(\ln x - 1)(\ln x + 1)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

INDICE

Dériver $(\ln x)^3$ comme u^3 avec $u = \ln x$: $(u^3)' = 3u^2u'$.

3.b. — 1 pts

Montrer que : $h'(x) \geq 0$ sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right] \cup [e;+\infty[$ et $h'(x) \leq 0$ sur $\left[\dfrac{1}{e};e\right]$

INDICE

Étudier le signe de chaque facteur : $\ln x - 1 \geq 0 \iff x \geq e$ et $\ln x + 1 \geq 0 \iff x \geq \dfrac{1}{e}$.

3.c. 1 pts

Calculer $h\left(\frac{1}{e}\right)$ et $h(e)$ puis dresser le tableau de variations de h

4. 1,5 pts

A l'aide du tableau de variations de h , donner l'image de chacun des intervalles $I = \left[\frac{1}{e}; e\right]$ et $J =]0; +\infty[$ par la fonction h

INDICE

L'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone est l'intervalle limité par les images (ou les limites) aux bornes.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, filières sciences économiques et sciences de gestion comptable, option française · 2024