BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2024

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/examens/2024-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2024	Session normale	Examen national	2h	4	20 pts (barème officiel)

Instructions au candidat(e)

Important : Le candidat est invité à lire et suivre attentivement ces recommandations.

Le document que vous avez entre les mains est de 3 pages :la première est réservée aux recommandations, les pages 2 et 3 sont réservées au sujet.

- Répondre aux questions du sujet avec précision et soin ;
- L'usage de la calculatrice scientifique non programmable est autorisé ;
- Vous devez justifier les résultats
- Vous pouvez répondre aux exercices selon l'ordre que vous choisissez, mais veuillez numéroter les exercices et les questions ;
- Veillez à la bonne présentation de votre copie et à une écriture lisible ;
- Il est souhaitable que les pages soient numérotées pour faciliter la correction ;
- Eviter l'écriture au stylo rouge ;
- Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

Exercice 1 — 5 pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n - 1$ pour tout n de IN

1. — 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2

INDICE

Remplacer n par 0, puis par 1, dans la relation de récurrence.

2.a. — 1 pts

Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -\frac{5}{3}$

INDICE

Partir de $u_n > -\frac{5}{3}$, multiplier par $\frac{2}{5}$ (nombre positif), puis retrancher 1.

2.b. — 0,75 pts

Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{5}\left(u_n + \frac{5}{3}\right)$, puis en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

INDICE

Calculer $u_{n+1} - u_n$ à partir de la relation de récurrence, puis factoriser par $-\frac{3}{5}$. Le signe se lit grâce à la question 2.a.

2.c. — 0,5 pts

Dire pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

INDICE

Utiliser le théorème sur les suites monotones et bornées.

3.a. — 0,5 pts

3. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + \frac{5}{3}$

Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

INDICE

Exprimer v_{n+1} à l'aide de u_{n+1}, remplacer u_{n+1}, puis factoriser par $\frac{2}{5}$.

3.b. — 0,25 pts

Calculer v_0

3.c. — 0,5 pts

Donner l'expression de v_n en fonction de n

INDICE

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q est $v_n = v_0\, q^n$.

3.d. 0,5 pts

En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{20}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{5}{3}$

3.e. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

INDICE

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 2 3 pts

Une urne contient trois boules vertes numérotées 1 ; 2 ; 3 , trois boules rouges numérotées 1 ; 2 ; 3 et trois boules blanches numérotées 1 ; 2 ; 2 (Les neufs boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « Les trois boules tirées portent le même numéro »

B : « Les trois boules tirées sont de couleurs deux à deux différentes »

1. 0,75 pts

Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$

INDICE

Compter, pour chaque numéro, les boules qui le portent, puis choisir 3 boules parmi elles.

2. 0,75 pts

Calculer $p(B)$

INDICE

Des couleurs deux à deux différentes : une boule de chaque couleur.

3. 0,75 pts

Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{28}$

INDICE

Une boule de chaque couleur, toutes avec le même numéro : examiner le numéro 1, puis le numéro 2.

4. 0,75 pts

En déduire $p(A \cup B)$

INDICE

Utiliser $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exercice 3 — 8 pts

Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $D =]0; e[\cup]e; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$$

1.a. — 2 pts

En remarquant que pour tout $x \neq 1$, $h(x) = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\ln x}}{1 - \dfrac{1}{\ln x}}$, montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} h(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$

INDICE

Diviser le numérateur et le dénominateur par $\ln x$, puis utiliser $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

1.b. — 2 pts

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x<e}} h(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} h(x) = +\infty$

INDICE

Le numérateur tend vers 2 ; étudier le signe de $\ln x - 1$ selon que $x < e$ ou $x > e$.

2.a. — 1 pts

Montrer que pour tout x de D : $h'(x) = \dfrac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$

INDICE

Dériver le quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln x + 1$ et $v(x) = \ln x - 1$: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

2.b. — 1,25 pts

Calculer $h\left(\dfrac{1}{e}\right)$ et donner le signe de $h'(x)$, puis dresser le tableau de variations de h

INDICE

$\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$. Pour le signe de $h'(x)$, regarder séparément le numérateur et chaque facteur du dénominateur.

2.c. i. — 1 pts

2.c. Déterminer , à l'aide du tableau de variations :

l'ensemble des solutions de l'inéquation : $h(x) \leq 0$

INDICE

Sur $]0; e[$, h est strictement décroissante et s'annule en $\dfrac{1}{e}$; sur $]e; +\infty[$, comparer $h(x)$ à 1.

2.c. ii. `0,75 pts`

l'image de l'intervalle $]0; e[$ par la fonction h

INDICE

Une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$ l'envoie sur l'intervalle ouvert dont les bornes sont ses limites en b et en a.

Exercice 4 — 4 pts

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies respectivement sur IR et sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x^2-4x+3$ et $g(x)=\ln x$

1. — 0,75 pts

Calculer $g(1)$, $f(1)$ et $f(3)$

2.a. — 1 pts

2. Ci-dessous, (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln 2 - 1$

INDICE

Poser $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=1$, donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x$.

2.b. — 1,25 pts

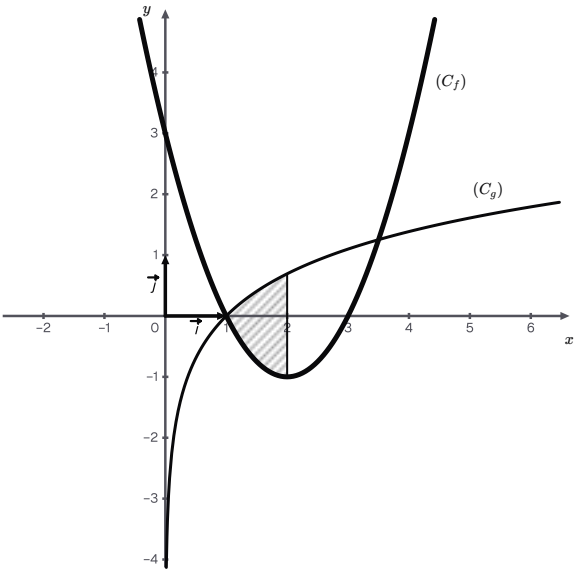
Calculer $\int_1^2 \left(x^2-4x+3\right)dx$

INDICE

Une primitive de $x\mapsto x^2-4x+3$ est $x\mapsto \dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$.

2.c. 1 pts

En déduire que l'aire de la partie hachurée est égale à $\left(2\ln 2 - \frac{1}{3}\right) u.a$



Les courbes (Cf) et (Cg) dans le repère orthonormé (O ; i ; j), et la partie hachurée.

INDICE

Sur $[1;2]$, comparer $g(x)$ et $f(x)$; l'aire de la partie comprise entre deux courbes est l'intégrale de la fonction du dessus moins celle du dessous.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences économiques et sciences de gestion comptable, option française · 2024