BURHAN

Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2023

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/examens/2023-session-rattrapage

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2023	Session de rattrapage	Examen national	2h	4	20 pts (barème officiel)

Instructions au candidat(e)

Important : Le candidat est invité à lire et suivre attentivement ces recommandations.

Le document que vous avez entre les mains est de 4 pages : la première est réservée aux recommandations.

- Répondre aux questions du sujet avec précision et soin ;
- L'usage de la calculatrice scientifique non programmable est autorisé ;
- Vous devez justifier les résultats
- Vous pouvez répondre aux exercices selon l'ordre que vous choisissez, mais veuillez numéroter les exercices et les questions selon l'ordre attribué dans l'épreuve ;
- Veillez à la bonne présentation de votre copie et à une écriture lisible ;
- Il est souhaitable que les pages soient numérotées pour faciliter la correction ;
- Eviter l'écriture au stylo rouge ;
- Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

Exercice 1 — 2 pts

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $w_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. — 0,25 pts

Vérifier que $w_n = 1 - \dfrac{2}{2^n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

INDICE

Réduire $1 - \dfrac{2}{2^n+1}$ au même dénominateur 2^n+1.

2. — 0,5 pts

Montrer que $w_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

INDICE

D'après la question 1, $w_n - 1 = -\dfrac{2}{2^n+1}$: étudier le signe de ce quotient.

3. — 0,75 pts

Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. (En utilisant la question 1.)

INDICE

Comparer $2^{n+1}+1$ et 2^n+1, puis les inverses : la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.

4. — 0,5 pts

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 — 3 pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n - \frac{5}{7}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. — 0,25 pts

Calculer u_1

INDICE

Appliquer la relation de récurrence avec $n = 0$.

2.a. — 0,25 pts

2. On pose $v_n = u_n + \frac{5}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Calculer v_0

2.b. — 1 pts

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{7}$

INDICE

Exprimer $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{5}{2}$ à l'aide de u_n, puis mettre $\frac{5}{7}$ en facteur.

2.c. — 0,5 pts

En déduire v_n en fonction de n

3.a. — 0,5 pts

Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_n = 3\left(\frac{5}{7}\right)^n - \frac{5}{2}$

3.b. — 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

INDICE

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 3

1 pts

$(\Omega; p)$ est un espace probabilisé fini et X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

1.

0,5 pts

Compléter le tableau ci-dessus.

INDICE

La somme des probabilités de toutes les valeurs prises par X vaut 1.

2.

0,5 pts

Calculer $E(X)$

Exercice 4

3 pts

Une urne contient quatre boules rouges et trois boules vertes. (Toutes les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'expérience suivante : « On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne. »

Soit l'événement A : « Les trois boules tirées sont de même couleur»

et l'événement B: « Tirer au moins une boule verte»

1.

1,5 pts

Vérifier que $p(A) = \frac{1}{7}$ et calculer $p(B)$

INDICE

Un tirage simultané de 3 boules parmi 7 est une combinaison : $\text{card}(\Omega) = C_7^3$. Pour B, passer par l'événement contraire $\overline{B}$: « aucune boule verte ».

2.

1,5 pts

On répète l'expérience citée ci-dessus 4 fois de suite dans les mêmes conditions.

Montrer que la probabilité pour que l'événement A se réalise exactement 3 fois est $\frac{24}{7^4}$

INDICE

Les 4 répétitions sont identiques et indépendantes, chacune réalise A avec la probabilité $p = \frac{1}{7}$: la loi binomiale donne $C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$.

Exercice 5 — 9 pts

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = \dfrac{-2 + \ln x}{-1 + \ln x}$

Soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. — 1 pts

Vérifier que le domaine de définition de la fonction g est $D_g =]0; e[\cup]e; +\infty[$

INDICE

$g(x)$ existe lorsque $\ln x$ existe et que le dénominateur $-1 + \ln x$ ne s'annule pas.

2.a. — 1 pts

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 1$

INDICE

Forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » : pour $x \neq 1$ (et $x \neq e$), diviser le numérateur et le dénominateur par $\ln x$.

2.b. — 1,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

INDICE

Même factorisation par $\ln x$ qu'en 2.a, cette fois pour $x > 1$.

2.c. — 1 pts

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x < e}} g(x) = +\infty$ et calculer $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} g(x)$

INDICE

Quand x tend vers e, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur $-1 + \ln x$ tend vers 0 : étudier le signe de $-1 + \ln x$ de chaque côté de e.

2.d. — 0,5 pts

Donner une interprétation géométrique des deux résultats précédents.

3.a. — 1 pts

Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{x(\ln x - 1)^2}$ pour tout x de D_g

INDICE

Dériver g comme un quotient $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = -2 + \ln x$ et $v(x) = -1 + \ln x$: ici $u'(x) = v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

3.b. — 1 pts

Montrer que g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]0; e[$ et $]e; +\infty[$

INDICE

Sur D_g : $x > 0$, et $(\ln x - 1)^2 > 0$ car $\ln x - 1 \neq 0$.

3.c. 1 pts

Calculer $g(e^2)$ puis dresser le tableau de variations de g

3.d. 1 pts

A l'aide du tableau de variations de g donner l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$g(x) \geq 0$

INDICE

Lire le tableau intervalle par intervalle : sur $]e;+\infty[$, g est strictement croissante et s'annule en e^2.

Exercice 6 — 2 pts

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - 1$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et (Δ) la droite d'équation $y = -x + 2$ et A le point d'abscisse a $(a > 0)$, intersection de (C_f) et (Δ)

(Voir figure ci-dessous)

1. — 0,5 pts

Vérifier que $e^{-a} = 3 - a$

INDICE

Le point A appartient à (C_f) et à (Δ) : ses coordonnées vérifient les deux équations.

2. — 1 pts

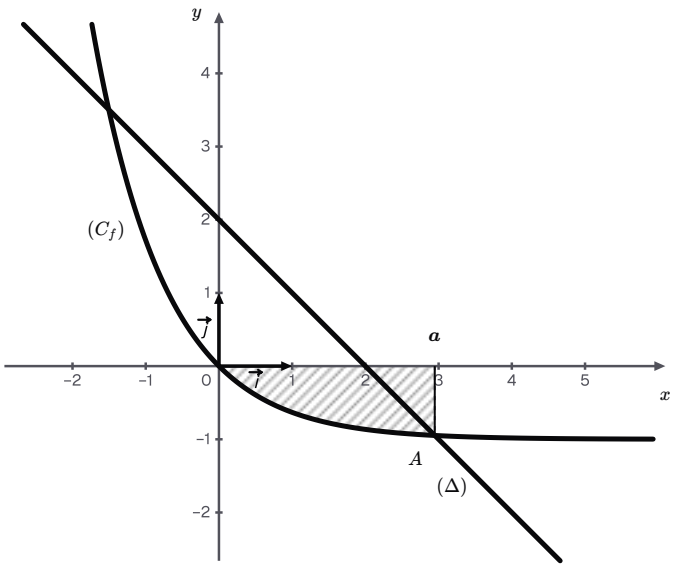
Montrer que $\int_0^a \left(e^{-x} - 1\right) dx = -2$

INDICE

Une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$; puis remplacer e^{-a} par $3 - a$ (question 1).

3. — 0,5 pts

En déduire l'aire de la partie hachurée.



La courbe (Cf) de f, la droite (Δ) d'équation y = -x + 2, le point A d'abscisse a et la partie hachurée.

INDICE

Sur $[0; a]$, la courbe (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses : l'aire est l'opposé de l'intégrale.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, filières sciences économiques et sciences de gestion comptable, option française · 2023