BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2023

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/examens/2023-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2023	Session normale	Examen national	2h	4	20 pts (barème officiel)

Instructions au candidat(e)

Important : Le candidat est invité à lire et suivre attentivement ces recommandations.

Le document que vous avez entre les mains est de 4 pages : la première est réservée aux recommandations.

- Répondre aux questions du sujet avec précision et soin ;
- L'usage de la calculatrice scientifique non programmable est autorisé ;
- Vous devez justifier les résultats
- Vous pouvez répondre aux exercices selon l'ordre que vous choisissez, mais veuillez respecter la numérotation des exercices et des questions dans le sujet ;
- Veillez à la bonne présentation de votre copie et à une écriture lisible ;
- Il est souhaitable que les pages soient numérotées pour faciliter la correction ;
- Eviter l'écriture au stylo rouge ;
- Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

Exercice 1 — 2 pts

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \frac{2}{7}w_n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. — 1 pts

Montrer par récurrence que $w_n < \frac{7}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

INDICE

Dans l'hérédité, multiplier l'inégalité $w_n < \frac{7}{5}$ par $\frac{2}{7} > 0$, puis ajouter 1.

2.a. — 0,5 pts

Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

INDICE

Calculer $w_{n+1} - w_n$ et le mettre sous la forme $\frac{5}{7}\left(\frac{7}{5} - w_n\right)$.

2.b. — 0,5 pts

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 — 3 pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+7u_n}{7+3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. — 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2

INDICE

Appliquer la relation de récurrence avec $n = 0$, puis avec $n = 1$.

2.a. — 0,25 pts

2. On pose $v_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Calculer v_0

2.b. — 1 pts

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$

INDICE

Calculer séparément $1-u_{n+1}$ et $1+u_{n+1}$ en fonction de u_n, sur le dénominateur commun $7+3u_n$, puis faire le quotient.

2.c. — 0,25 pts

En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

3.a. — 0,5 pts

Vérifier que $u_n = \dfrac{1-v_n}{1+v_n}$

INDICE

Remplacer v_n par $\dfrac{1-u_n}{1+u_n}$ dans $\dfrac{1-v_n}{1+v_n}$ et multiplier numérateur et dénominateur par $1+u_n$.

3.b. — 0,25 pts

En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

3.c. — 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

INDICE

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 3 1 pts

$(\Omega; p)$ est un espace probabilisé fini.

On rappelle que si A et B sont deux événements de Ω alors

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Soit A et B deux événements indépendants tels que : $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(A \cup B) = \frac{5}{8}$

Question 1 pts

Calculer $p(B)$

INDICE

Deux événements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exercice 4 — 3 pts

Une urne contient cent jetons indiscernables au toucher de couleur soit blanche soit noire et portant soit le chiffre 1 soit le chiffre 2.

La répartition de ces jetons est donnée par le tableau suivant :

Chiffre porté par le jeton \ Couleur	Blanche	Noire	Total
1	50	16	66
2	14	20	34
Total	64	36	100

On tire au hasard un jeton de l'urne.

a. — 0,5 pts

1. Calculer les probabilités suivantes :

La probabilité p_1 pour que le jeton soit de couleur blanche.

INDICE

Les jetons sont indiscernables au toucher : il y a équiprobabilité, et la probabilité d'un événement est le nombre de jetons favorables divisé par 100.

b. — 0,5 pts

La probabilité p_2 pour que le jeton porte le chiffre 2

c. — 0,5 pts

La probabilité p_3 pour que le jeton porte le chiffre 2 et soit de couleur blanche.

2. — 0,5 pts

La probabilité p_4 pour que le jeton tiré porte le chiffre 2 sachant qu'il est de couleur blanche.

INDICE

p_4 est une probabilité conditionnelle : $p_4 = \dfrac{p_3}{p_1}$.

3.a. — 0,5 pts

3. On considère la variable aléatoire X qui est égale au chiffre porté par le jeton.

Copier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2
$p(X = x_i)$		

3.b. — 0,5 pts

Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X

Exercice 5 2,5 pts

1. 1,5 pts

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$

INDICE

Pour la seconde limite, forme indéterminée « $+\infty-\infty$ » : écrire $\dfrac{1}{x}+\ln x=\dfrac{1+x\ln x}{x}$ et utiliser $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x=0$.

2. 1 pts

On rappelle que si f est une fonction dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}\times\ln x\right)$

INDICE

Appliquer le rappel à la fonction $\ln$ en $x_0=1$: $\ln 1=0$ et $\ln'(1)=\dfrac{1}{1}=1$.

Exercice 6 — 8,5 pts

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{x}{e^x}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1.a. — 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

INDICE

Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

1.b. — 1,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

INDICE

Quand $x \to -\infty$: $e^x \to 0$ par valeurs positives. Pour $\dfrac{f(x)}{x}$, écrire $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x}$.

2.a. — 0,5 pts

Monter que $f'(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$

INDICE

Dériver $\dfrac{x}{e^x}$ comme un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

2.b. — 1 pts

Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f

INDICE

$e^x > 0$ pour tout réel x : $f'(x)$ a le signe de $x - 1$.

2.c. — 1 pts

Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0

INDICE

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

3. — 1,5 pts

Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 2

INDICE

Dériver $f'(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$ comme un quotient, puis étudier le signe de $f''(x)$: un point d'inflexion correspond à un changement de signe de f''.

4.a. 1 pts

4. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation : $y = 1$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

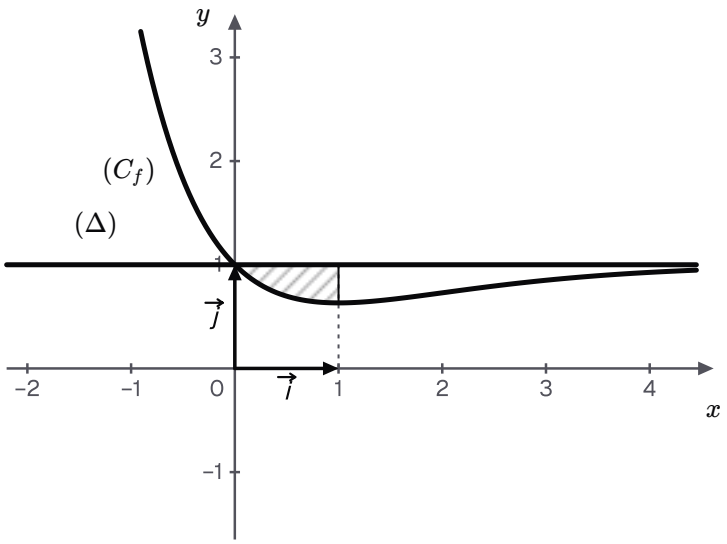
A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx = \dfrac{e-2}{e}$

INDICE

Poser $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$.

4.b. 1 pts

En déduire l'aire de la partie hachurée.



La courbe (Cf) de f et la droite (Δ) d'équation y = 1 dans un repère orthonormé, et la partie hachurée.

INDICE

Sur $[0; 1]$, la droite (Δ) est au-dessus de (C_f) : l'aire est $\int_0^1 (1 - f(x))\, dx$, et $1 - f(x) = \dfrac{x}{e^x} = x\, e^{-x}$.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, filières sciences économiques et sciences de gestion comptable, option française · 2023