BURHAN

Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2022

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/examens/2022-session-rattrapage

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2022	Session de rattrapage	Examen national	2h	4	20 pts (barème officiel)

Instructions au candidat(e)

Important : Le candidat est invité à lire et suivre attentivement ces recommandations.

Le document que vous avez entre les mains est de 4 pages : la première est réservée aux recommandations.

- Répondre aux questions du sujet avec précision et soin ;
- L'usage de la calculatrice scientifique non programmable est autorisé ;
- Vous devez justifier les résultats
- Vous pouvez répondre aux exercices selon l'ordre que vous choisissez, mais veuillez numéroter les exercices et les questions ;
- Veillez à la bonne présentation de votre copie et à une écriture lisible ;
- Il est souhaitable que les pages soient numérotées pour faciliter la correction ;
- Eviter l'écriture au stylo rouge ;
- Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

Exercice 1 — 4,5 pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. — 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2

INDICE

Appliquer la relation de récurrence avec $n = 0$, puis avec $n = 1$.

2.a. — 0,5 pts

Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 0$

INDICE

Si $u_n > 0$, le numérateur $3u_n$ et le dénominateur $2u_n + 1$ sont tous deux strictement positifs.

2.b. — 0,5 pts

Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 1$

INDICE

Exprimer $1 - u_{n+1}$ en fonction de u_n : on trouve $\dfrac{1 - u_n}{2u_n + 1}$.

3.a. — 0,5 pts

Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n\,(1 - u_n)}{2u_n + 1}$

INDICE

Réduire $u_{n+1} - u_n$ au même dénominateur $2u_n + 1$, puis factoriser le numérateur par $2u_n$.

3.b. — 0,25 pts

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

3.c. — 0,25 pts

Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4.a. — 0,25 pts

4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$

Calculer v_0

4.b. — 0,5 pts

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$

INDICE

Écrire $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{2u_n + 1}{3u_n}$, puis calculer v_{n+1} et le comparer à $v_n = \dfrac{1 - u_n}{u_n}$.

4.c. 0,5 pts

Exprimer v_n en fonction de n

5.a. 0,25 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{v_n + 1}$

5.b. 0,25 pts

Déduire de ce qui précède que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1}$

5.c. 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

INDICE

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Exercice 2 — 11 pts

Partie I

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$$

I. 1. — 1 pts

Montrer que $g'(x) = 2\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$

INDICE

$(x^2)' = 2x$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; réduire ensuite au même dénominateur x.

I. 2. — 1 pts

En déduire que g est strictement décroissante sur $]0;1]$ et que g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

INDICE

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, et sur $]0;+\infty[$ les facteurs $x+1$ et x sont strictement positifs.

I. 3.a. — 0,25 pts

Calculer $g(1)$

I. 3.b. — 0,25 pts

Dresser le tableau de variations de g (Le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé)

I. 3.c. — 0,5 pts

En déduire que $g(x) \geq 3$ pour tout x de $]0;+\infty[$

INDICE

Lire le tableau de variations : quel est le minimum de g sur $]0;+\infty[$?

II. 1. — 1 pts

Partie II

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

INDICE

Écrire $\dfrac{2\ln x}{x} = 2\ln x \times \dfrac{1}{x}$: ce n'est pas une forme indéterminée en 0 à droite.

II. 2.a. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

II. 2.b. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x+1))$

II. 2.c. 0,25 pts

Donner une interprétation géométrique du résultat

II. 3.a. 1 pts

Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

INDICE

Dériver $\dfrac{\ln x}{x}$ comme un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

II. 3.b. 0,5 pts

Déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

II. 3.c. 0,5 pts

Dresser le tableau de variations de f

II. 4.a. 1 pts

Montrer que $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}(-3+2\ln x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

INDICE

Partir de $f'(x)=1+\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$ et dériver $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ comme un quotient.

II. 4.b. 1 pts

En déduire que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse $e\sqrt{e}$

INDICE

Un point d'inflexion correspond à un changement de signe de f'' ; et $e\sqrt{e}=e^1\times e^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$.

II. 5.a. 1 pts

5. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y=x+1$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

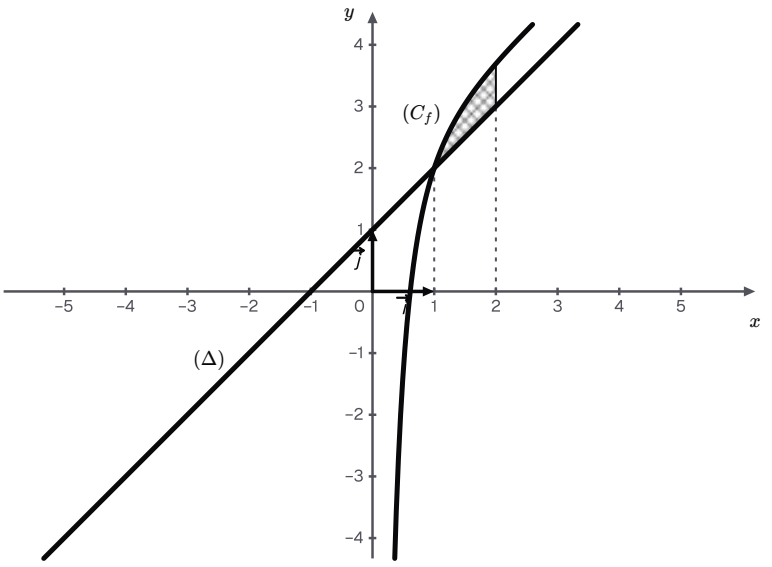
Montrer que $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

INDICE

Avec $u(x)=\ln x$, on a $\dfrac{\ln x}{x}=u'(x)\,u(x)$, dont une primitive est $\dfrac{1}{2}\left(u(x)\right)^2$.

II. 5.b. 0,75 pts

En déduire l'aire de la partie hachurée



La courbe (Cf) de f et la droite (Δ) d'équation y = x + 1 dans un repère orthonormé, et la partie hachurée.

INDICE

Sur $[1;2]$, (C_f) est au-dessus de (Δ) : l'aire est $\int_1^2 (f(x) - (x+1))\,dx$.

Exercice 3 — 4,5 pts

(On donnera les résultats sous forme de fraction)

Une urne contient six jetons rouges portant les numéros : 1, 2, 2, 2, 3, 3 et quatre jetons verts portant les numéros : 2, 2, 2, 3 (Tous les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard trois jetons de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « Les jetons tirés portent le même numéro »

B : « Les jetons tirés sont de même couleur »

1. — 0,5 pts

Montrer que le nombre de tirages possibles est égal à 120

INDICE

Un tirage simultané de 3 jetons parmi 10 est une combinaison : il y en a C_{10}^{3}.

2.a. — 0,75 pts

Montrer que $p(A) = \dfrac{7}{40}$

INDICE

Compter les jetons de chaque numéro, toutes couleurs confondues : un seul jeton porte le numéro 1.

2.b. — 0,75 pts

Calculer $p(B)$

2.c. — 1 pts

Calculer la probabilité de tirer trois jetons de même couleur sachant qu'ils portent le même numéro.

INDICE

On cherche $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$: compter les tirages de trois jetons de même numéro **et** de même couleur.

2.d. — 0,5 pts

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

INDICE

A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

3. — 1 pts

Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de couleurs obtenues à chaque tirage.

Calculer $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$

INDICE

L'urne ne contient que deux couleurs : X ne prend que les valeurs 1 et 2, et $(X = 1) = B$.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, filières sciences économiques et sciences de gestion comptable, option française · 2022