BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2022

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/examens/2022-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2022	Session normale	Examen national	2h	4	20 pts (barème officiel)

Instructions au candidat(e)

Important : Le candidat est invité à lire et suivre attentivement ces recommandations.

Le document que vous avez entre les mains est de 4 pages : la première est réservée aux recommandations.

- Répondre aux questions du sujet avec précision et soin ;
- L'usage de la calculatrice scientifique non programmable est autorisé ;
- Vous devez justifier les résultats
- Vous pouvez répondre aux exercices selon l'ordre que vous choisissez, mais veuillez numéroter les exercices et les questions ;
- Veillez à la bonne présentation de votre copie et à une écriture lisible ;
- Il est souhaitable que les pages soient numérotées pour faciliter la correction ;
- Eviter l'écriture au stylo rouge ;
- Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

Exercice 1 — 4,5 pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{8}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. — 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2

INDICE

Appliquer la relation de récurrence avec $n = 0$, puis avec $n = 1$.

2. — 1 pts

Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 2$

INDICE

Dans l'hérédité, partir de $u_n > 2$, multiplier par $\frac{1}{5} > 0$, puis ajouter $\frac{8}{5}$.

3.a. — 0,5 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}(2 - u_n)$

INDICE

Remplacer u_{n+1} par son expression, regrouper les termes en u_n, puis factoriser par $\frac{4}{5}$.

3.b. — 0,25 pts

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

INDICE

Utiliser la question 2 pour trouver le signe de $2 - u_n$.

4. — 0,25 pts

Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

INDICE

Une suite décroissante et minorée est convergente.

5.a. — 0,25 pts

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 2$

Calculer v_0

INDICE

Remplacer n par 0 dans la définition de v_n.

5.b. — 0,5 pts

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$

INDICE

Exprimer $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ à l'aide de u_n, puis de v_n.

5.c. 0,5 pts

Donner v_n en fonction de n

INDICE

Le terme général d'une suite géométrique de raison q est $v_n = v_0\, q^n$.

6.a. 0,5 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2$

INDICE

Isoler u_n dans la relation $v_n = u_n - 2$.

6.b. 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

INDICE

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Exercice 2 — 11 pts

Partie I

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 - \ln x$$

I. 1. — 0,5 pts

Montrer que $h'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

INDICE

Dériver terme à terme : $\left(x^2\right)' = 2x$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, puis réduire au même dénominateur.

I. 2. — 0,5 pts

Etudier le signe de $h'(x)$ sur $]0;+\infty[$

INDICE

Sur $]0;+\infty[$, le dénominateur x est strictement positif : $h'(x)$ a le signe de $2x^2-1$.

I. 3. — 1 pts

Vérifier que $h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1+\ln 2}{2}$ et dresser le tableau de variations de h (Le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé)

INDICE

Utiliser $\ln \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\ln\sqrt{2} = -\dfrac{1}{2}\ln 2$, puis lire les variations sur le signe de $h'(x)$.

I. 4. — 0,5 pts

En déduire que : $h(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

INDICE

Le tableau de variations montre que h admet un minimum en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; quel est son signe ?

II. 1.a. — 0,5 pts

Partie II

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x} + x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

INDICE

Écrire $f(x) = (1+\ln x)\times\dfrac{1}{x} + x$ et chercher la limite de chaque facteur en 0 à droite.

II. 1.b. 0,25 pts

Donner une interprétation géométrique du résultat.

INDICE

Une limite infinie en un réel a donne une asymptote verticale d'équation $x = a$.

II. 2.a. 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

INDICE

Écrire $\dfrac{1+\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$ et utiliser $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

II. 2.b. 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$

INDICE

Simplifier $f(x) - x$, puis reprendre les limites de la question 2.a.

II. 2.c. 0,25 pts

Déduire de ce qui précède une interprétation géométrique du résultat.

INDICE

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.

II. 3.a. 1 pts

Montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$

INDICE

Dériver $\dfrac{1+\ln x}{x}$ avec la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, puis ajouter la dérivée de x.

II. 3.b. 1 pts

Déduire de la question 4. de la partie I que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

INDICE

Le signe de $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ est celui de $h(x)$.

II. 4.a. 0,5 pts

4. Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$

Calculer $f\left(\dfrac{1}{e}\right)$

INDICE

Utiliser $\ln \dfrac{1}{e} = -1$.

II. 4.b. 1 pts

Etudier le signe de $f(x) - x$

INDICE

$f(x) - x = \dfrac{1 + \ln x}{x}$ et $x > 0$: étudier le signe de $1 + \ln x$, en se souvenant que $\ln$ est strictement croissante.

II. 4.c. 0,5 pts

En déduire la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur chacun des intervalles $\left]0; \dfrac{1}{e}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$

INDICE

Le point de (C) d'abscisse x est au-dessus du point de (Δ) de même abscisse lorsque $f(x) - x \geq 0$.

II. 5.a. 1,5 pts

5. Dans la figure ci-dessous (C)est la courbe représentative de f et(Δ) la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

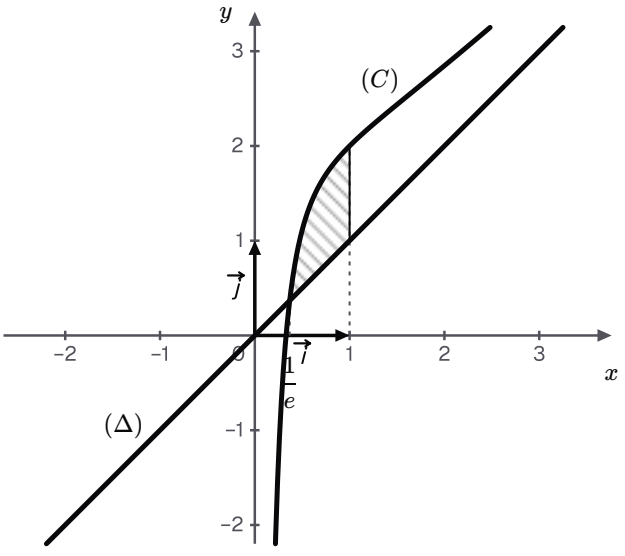
Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x}\, dx$ et calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{x}\, dx$

INDICE

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\ln$; et $\dfrac{\ln x}{x} = u'(x)\, u(x)$ avec $u = \ln$, dont une primitive est $\dfrac{u^2}{2}$.

II. 5.b. 1 pts

En déduire l'aire de la partie hachurée.



La courbe (C) de f et la droite (Δ) d'équation y = x dans un repère orthonormé, et la partie hachurée.

INDICE

Sur $\left[\dfrac{1}{e}; 1\right]$, (C) est au-dessus de (Δ) : l'aire est $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} (f(x) - x)\, dx$, et $f(x) - x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$.

Exercice 3 — 4,5 pts

(On donnera les résultats sous forme de fraction)

Un sac contient cinq boules blanches numérotées 1-2-3-3-3 et quatre boules noires numérotées 1-2-3-3 (Toutes les boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard deux boules du sac.

On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « L'une exactement des deux boules tirées porte le numéro 3 »

1.a. — 1 pts

Montrer que $p(A) = \frac{4}{9}$

INDICE

Le tirage simultané de deux boules parmi neuf donne $\binom{9}{2}$ issues équiprobables ; « même couleur » signifie deux blanches ou deux noires.

1.b. — 0,5 pts

Calculer $p(B)$

INDICE

Le sac contient 5 boules portant le numéro 3 et 4 boules qui ne le portent pas : il faut une boule de chaque groupe.

1.c. — 1 pts

Calculer $p(A \cap B)$

INDICE

$A \cap B$: deux boules de même couleur, l'une portant le 3 et l'autre non. Distinguer le cas de deux blanches et celui de deux noires.

1.d. — 0,5 pts

Les événements A et B sont-ils Indépendants ? Justifier la réponse.

INDICE

A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

2.a. 1 pts

2. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées et qui portent le numéro 3.

Copier et remplir le tableau ci – contre en justifiant les réponses.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{15}{36}$		

INDICE

Séparer les 3 boules blanches numérotées 3 des 6 autres boules ; $X = k$ signifie k boules parmi les 3 et $2 - k$ parmi les 6.

2.b. 0,5 pts

Calculer $E(X)$l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

INDICE

$E(X) = \sum x_i \, p(X = x_i)$.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, filières sciences économiques et sciences de gestion comptable, option française · 2022