BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2021

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/examens/2021-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2021	Session normale	Examen national	2h	4	20 pts (barème officiel)

Instructions au candidat(e)

Important : Le candidat est invité à lire et suivre attentivement ces recommandations.

Le document que vous avez entre les mains est de 3 pages : la première est réservée aux recommandations.

- Répondre aux questions du sujet avec précision et soin ;
- L'usage de la calculatrice scientifique non programmable est autorisé ;
- Vous devez justifier les résultats
- Vous pouvez répondre aux exercices selon l'ordre que vous choisissez, mais veuillez numéroter les exercices et les questions ;
- Veillez à la bonne présentation de votre copie et à une écriture lisible ;
- Il est souhaitable que les pages soient numérotées pour faciliter la correction ;
- Eviter l'écriture au stylo rouge ;
- Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

Exercice 1 — 5 pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. — 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2

INDICE

Appliquer la relation de récurrence avec $n = 0$, puis avec $n = 1$.

2. — 1 pts

Montrer par récurrence que pour tout n de$\mathbb{N}$: $u_n < -\frac{3}{4}$

INDICE

Dans l'hérédité, multiplier l'inégalité $u_n < -\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{3} > 0$, puis retrancher $\frac{1}{2}$.

3.a. — 0,5 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}\left(u_n + \frac{3}{4}\right)$

INDICE

Développer chacun des deux membres et comparer.

3.b. — 0,5 pts

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

4. — 0,25 pts

Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5.a. — 0,25 pts

5. On pose pour tout n de$\mathbb{N}$: $v_n = u_n + \frac{3}{4}$

Calculer v_0

5.b. — 0,5 pts

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$

INDICE

Exprimer $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{4}$ à l'aide de u_n, puis mettre $\frac{1}{3}$ en facteur.

5.c. — 0,5 pts

Donner v_n en fonction de n

5.d. — 0,5 pts

En déduire que pour tout n de$\mathbb{N}$: $u_n = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right]$

6. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

INDICE

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 2 5,5 pts

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

1. 1 pts

Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

INDICE

Étudier séparément la limite de $-\frac{1}{x^2}$ et celle de $\ln x$.

2.a. 0,75 pts

Montrer que : $\forall x > 0$; $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$

INDICE

Écrire $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$; sa dérivée est $-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

2.b. 0,5 pts

Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$

3.a. 1 pts

Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g(1)$ puis dresser le tableau de variations de g

INDICE

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln e = -1$ et $\frac{1}{\left(\frac{1}{e}\right)^2} = e^2$.

3.b. 1 pts

A partir du tableau de variations de g , donner le signe de $g(x)$ sur $]0;1]$et sur $[1;+\infty[$

3.c. 1,25 pts

A l'aide du tableau de variations, résoudre l'inéquation : $1 + e^2 + \ln x \geq \frac{1}{x^2}$

INDICE

Faire passer $\frac{1}{x^2}$ et e^2 d'un membre à l'autre pour reconnaître $g(x)$, puis utiliser $g\left(\frac{1}{e}\right) = -e^2$.

Exercice 3 — 5,5 pts

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$$

1. — 1 pts

Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

INDICE

En $+\infty$, la différence $(\ln x)^2 - \ln x$ est une forme indéterminée : factoriser par $\ln x$.

2.a. — 1 pts

Montrer que : $\forall x > 0$; $f'(x) = \dfrac{1}{x}(2\ln x - 1)$

INDICE

La dérivée de u^2 est $2u'u$; ici $u = \ln$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.b. — 1 pts

Montrer que $f'(x) \leq 0$ sur $]0;\sqrt{e}]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[\sqrt{e};+\infty[$

INDICE

Pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2\ln x - 1$. Résoudre $2\ln x - 1 \leq 0$.

2.c. — 1 pts

Calculer $f\left(\sqrt{e}\right)$ et $f(e)$ puis dresser le tableau de variations de f

INDICE

$\ln\sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$ et $\ln e = 1$.

3.a. — 0,5 pts

3. A partir du tableau de variations de f :

Donner la valeur minimale de f sur $]0;+\infty[$

3.b. — 1 pts

Déterminer l'image de l'intervalle $[\sqrt{e};e]$ par f

Exercice 4 — 4 pts

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

a. — 0,5 pts

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{e^x}{e^x-1}\right)$$

INDICE

Diviser le numérateur et le dénominateur de $\frac{e^x}{e^x-1}$ par e^x.

b. — 0,5 pts

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\frac{e^x}{e^x-1}\right)$$

c. — 0,5 pts

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{e^x-1}{x^2}\right)$$

INDICE

Écrire $\frac{e^x-1}{x^2}=\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x}$ et utiliser la limite usuelle $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

2.a. — 0,5 pts

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $t^2+t-2=0$

2.b. — 1 pts

En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation suivante : $e^{2x}+e^x-2=0$

INDICE

Poser $t=e^x$: alors $e^{2x}=(e^x)^2=t^2$, et $t>0$.

3. — 1 pts

Donner une primitive H de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x)=e^x+\frac{2\ln x}{x}$$

INDICE

Reconnaître dans $\frac{2\ln x}{x}$ la forme $2u'u$ avec $u(x)=\ln x$: une primitive de $2u'u$ est u^2.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, filières sciences économiques et sciences de gestion comptable, option française · 2021