BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 2

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La calculatrice non programmable est autorisée. Les réponses doivent être justifiées ; la clarté de la rédaction entre dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 4,5 pts

Calculs d'intégrales

Les questions de cet exercice sont indépendantes, sauf la question 1.b, qui utilise le résultat de la question 1.a.

1.a — 0,75 pts

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 - 4x + 1\right) \mathrm{d}x$.

1.b — 0,5 pts

En utilisant la linéarité de l'intégrale et le résultat de la question 1.a, calculer $M = \displaystyle\int_0^2 \left(6x^2 - 8x + 5\right) \mathrm{d}x$.

INDICE

Écrire $6x^2 - 8x + 5$ à l'aide de $3x^2 - 4x + 1$ et d'une constante.

2 — 1 pts

Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

3 — 1 pts

Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 2x \left(x^2 + 1\right)^3 \mathrm{d}x$.

INDICE

Reconnaître la forme $u'u^n$ avec $u(x) = x^2 + 1$.

4 — 1,25 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $L = \displaystyle\int_0^1 (x + 1)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$, puis interpréter ce résultat en termes d'aire, dans un repère orthogonal du plan.

INDICE

Dériver le facteur $x + 1$ et intégrer le facteur e^x.

Exercice 2 — 5 pts

Coût marginal, valeur moyenne et aire

Une entreprise fictive fabrique des panneaux isolants. Pour une production de q centaines de panneaux, avec $0 \leq q \leq 4$, le coût total est $C(q)$, en milliers de dirhams. On admet que le coût marginal est égal à $C'(q)$ et que, pour tout $q \in [0\,;\,4]$:

$$C'(q) = 3q^2 - 12q + 15.$$

Les coûts fixes de l'entreprise s'élèvent à 8 milliers de dirhams, c'est-à-dire $C(0) = 8$. On note (Γ) la courbe de la fonction C' dans un repère orthogonal, la variable q étant portée sur l'axe des abscisses.

1 — 1 pts

Montrer que, pour tout $q \in [0\,;\,4]$, $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 8$.

2 — 1 pts

Calculer $\displaystyle\int_1^3 C'(q)\,\mathrm{d}q$, puis interpréter ce résultat pour l'entreprise.

3 — 1 pts

Calculer la valeur moyenne μ du coût marginal sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

4.a — 0,75 pts

Vérifier que, pour tout $q \in [0\,;\,4]$, $C'(q) - 3 = 3(q-2)^2$, puis en déduire la position de (Γ) par rapport à la droite (D) d'équation $y = 3$.

4.b — 1,25 pts

On considère la partie du plan comprise entre (Γ) et (D), pour q allant de 0 à 4. Calculer son aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire.

INDICE

La fonction $q \mapsto 3(q-2)^2$ est de la forme $3u'u^2$.

Exercice 3 — 5 pts

Tirages successifs et probabilités conditionnelles

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : trois boules rouges et deux boules vertes. On tire au hasard une première boule, on note sa couleur et on la garde hors de l'urne, puis on tire au hasard une seconde boule parmi les quatre restantes.

On note R_1 l'événement « la première boule tirée est rouge », V_1 l'événement « la première boule tirée est verte », R_2 l'événement « la deuxième boule tirée est rouge » et V_2 l'événement « la deuxième boule tirée est verte ».

1 — 1 pts

Justifier que $p_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{2}$ et que $p_{V_1}(R_2) = \dfrac{3}{4}$, puis construire l'arbre pondéré qui décrit cette expérience.

2 — 0,5 pts

Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient rouges.

3 — 1,25 pts

Montrer que $p(R_2) = \dfrac{3}{5}$.

INDICE

Utiliser les deux chemins de l'arbre qui mènent à R_2.

4 — 0,75 pts

On sait que la deuxième boule tirée est rouge. Quelle est alors la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?

INDICE

Traduire la question par $p_{R_2}(R_1)$ et utiliser les résultats des questions 2 et 3.

5 — 0,75 pts

Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Justifier.

6 — 0,75 pts

Calculer la probabilité de l'événement E : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Exercice 4 5,5 pts

Contrôle de pièces et variable aléatoire

Un atelier fictif range six pièces dans une boîte : quatre pièces sont conformes et deux sont défectueuses. Un contrôleur prélève au hasard et simultanément deux pièces de la boîte. On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses parmi les deux pièces prélevées.

1 0,5 pts

Combien de prélèvements de deux pièces le contrôleur peut-il obtenir ?

2 1,25 pts

Déterminer les valeurs prises par X. Montrer que $p(X=0)=\dfrac{2}{5}$, puis donner la loi de probabilité de X.

3 0,5 pts

Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

4 1 pts

Calculer la variance $V(X)$, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'écart-type $\sigma(X)$.

5.a 1,25 pts

Le contrôleur répète ce prélèvement trois fois ; après chaque prélèvement, il remet les deux pièces dans la boîte. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de prélèvements qui ne contiennent aucune pièce défectueuse.

Montrer que la loi de Z est binomiale et donner ses deux paramètres, puis calculer $p(Z=2)$.

INDICE

Préciser l'épreuve répétée, le succès et sa probabilité (question 2), puis justifier que les trois prélèvements sont indépendants.

5.b 1 pts

Calculer la probabilité qu'au moins un des trois prélèvements ne contienne aucune pièce défectueuse, puis calculer l'espérance $E(Z)$.

SOURCES

BURHAN