BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 1

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Une calculatrice non programmable est autorisée ; elle est nécessaire aux questions 2.b et 2.c de l'exercice 1. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 — 4,5 pts

Suites arithmétiques et géométriques

Deux coopératives fictives, notées A et B, produisent du miel. Les mois sont numérotés à partir de 0 : le mois $n = 0$ est le premier mois de l'étude.

- Au mois 0, la coopérative A produit 500 kg de miel ; ensuite, sa production augmente de 40 kg chaque mois par rapport au mois précédent. On note u_n sa production, en kilogrammes, au mois n ; ainsi $u_0 = 500$.
- Au mois 0, la coopérative B produit 400 kg de miel ; ensuite, sa production est multipliée par $1{,}1$ chaque mois. On note v_n sa production, en kilogrammes, au mois n ; ainsi $v_0 = 400$.

1.a — 0,25 pts

Calculer u_1 et u_2.

1.b — 0,75 pts

Justifier que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison, puis exprimer u_n en fonction de n.

1.c — 0,75 pts

Calculer la production totale de la coopérative A pendant les douze premiers mois, c'est-à-dire $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{11}$.

INDICE

Une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut le nombre de termes multiplié par la demi-somme du premier et du dernier terme.

2.a — 0,75 pts

Justifier que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison, puis exprimer v_n en fonction de n.

2.b — 1 pts

Montrer que la production totale de la coopérative B pendant les douze premiers mois est $T = v_0 + v_1 + \cdots + v_{11} = 4000\left(1{,}1^{12} - 1\right)$, puis en donner une valeur arrondie au kilogramme. Laquelle des deux coopératives a le plus produit pendant ces douze mois ?

2.c — 1 pts

À l'aide de la calculatrice, déterminer le premier mois au cours duquel la production de B dépasse celle de A, c'est-à-dire le plus petit entier naturel n tel que $v_n > u_n$.

INDICE

Utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice avec $u_n = 500 + 40n$ et $v_n = 400 \times 1{,}1^n$.

Exercice 2 — 5 pts

Suite récurrente et suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 1{,}4$.

1 — 0,25 pts

Calculer u_1 et u_2.

2 — 1,25 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < 7$.

INDICE

Initialisation en $n = 0$; pour l'hérédité, partir de $u_n < 7$, multiplier par $0{,}8$, puis ajouter $1{,}4$.

3 — 1,25 pts

a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}2\,(7 - u_n)$.

b) En déduire que la suite (u_n) est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.

INDICE

Une suite croissante et majorée converge.

4.a — 1 pts

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 7$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}8$ et calculer v_0.

4.b — 1,25 pts

En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - 5 \times 0{,}8^n$, puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 — 5,25 pts

Calcul de primitives

Dans les questions 1.a à 1.e, déterminer une primitive de la fonction donnée sur l'intervalle indiqué.

1.a — 0,5 pts

$f_1(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

1.b — 0,5 pts

$f_2(x) = 2x^3 - \dfrac{3}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1.c — 0,75 pts

$f_3(x) = 2x\left(x^2+1\right)^3$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Reconnaître la forme $u' \times u^3$.

1.d — 0,75 pts

$f_4(x) = \dfrac{6}{(2x+3)^2}$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

1.e — 1 pts

$f_5(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Écrire $x = \dfrac{2x}{2}$.

2 — 1 pts

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 6x + 1$. Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $G(1) = 2$.

3 — 0,75 pts

On considère, pour $x > -1$, $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ et $F(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Vérifier que F est une primitive de f sur $]-1\,;+\infty[$, puis en déduire la primitive H de f sur $]-1\,;+\infty[$ qui s'annule en 0.

Exercice 4 — 5,25 pts

Coût marginal, coût total et coût moyen

Une entreprise fictive fabrique des lampes de bureau. Elle en produit q centaines par mois, avec $q \in [0\,;\,8]$. Les coûts sont exprimés en milliers de dirhams.

Le coût marginal est donné par $C_m(q) = 3q^2 - 12q + 15$. Le coût total mensuel C est la primitive de C_m sur $[0\,;\,8]$ dont la valeur en 0 est égale aux coûts fixes, qui s'élèvent à 32 milliers de dirhams : $C(0) = 32$.

1 — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $q \in [0\,;\,8]$, $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 32$.

2 — 1 pts

Vérifier que $C_m(q) = 3(q-2)^2 + 3$. Préciser alors comment varie C sur $[0\,;\,8]$ et dresser son tableau de variations.

3.a — 0,25 pts

Le coût moyen de production est défini sur $]0\,;\,8]$ par $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. Montrer que $C_M(q) = q^2 - 6q + 15 + \dfrac{32}{q}$. On admet que $\lim_{q \to 0^+} C_M(q) = +\infty$.

3.b — 1,25 pts

Montrer que, pour tout $q \in]0\,;\,8]$, $C'_M(q) = \dfrac{2(q-4)\left(q^2+q+4\right)}{q^2}$.

INDICE

Mettre $2q - 6 - \dfrac{32}{q^2}$ au même dénominateur, puis développer l'expression proposée.

3.c — 1,5 pts

Étudier le signe de $C'_M(q)$ sur $]0\,;\,8]$, dresser le tableau de variations de C_M, puis déterminer la production pour laquelle le coût moyen est minimal et la valeur de ce coût moyen minimal.

3.d — 0,5 pts

Vérifier que, pour la production trouvée à la question 3.c, le coût marginal est égal au coût moyen.

SOURCES

BURHAN