BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 2

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La calculatrice non programmable est autorisée. Les réponses doivent être justifiées ; la clarté de la rédaction entre dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 4 pts

Calculs, équation, inéquation et dérivée avec le logarithme népérien

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1 — 0,75 pts

On pose $A = \ln 18 - 2\ln 3 + \ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$. Montrer que $A = -\ln 2$, puis calculer $B = \ln\left(\mathrm{e}^3\right) + \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$.

2 — 1,25 pts

Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels l'équation $\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln(4x-2)$ a un sens, puis la résoudre.

INDICE

Commencer par les conditions d'existence, puis regrouper le membre de gauche en un seul logarithme.

3 — 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2x-1) \leq \ln(x+3)$.

4 — 1 pts

Soit k la fonction définie par $k(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. Justifier que k est définie sur $\mathbb{R}$, calculer $k'(x)$ et en déduire le sens de variation de k.

INDICE

Poser $u(x) = x^2 + 1$ et écrire $k = \ln u$.

Exercice 2 — 4,5 pts

Équations, inéquations et limites avec l'exponentielle

Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

1.a — 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{1-2x} = 3$.

1.b — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2} \leq \mathrm{e}^{x+2}$.

2.a — 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + 2 = (\mathrm{e}^{x} - 1)(\mathrm{e}^{x} - 2)$, puis résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + 2 = 0$.

INDICE

On peut aussi poser $X = \mathrm{e}^{x}$: l'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$.

2.b — 1 pts

En déduire les solutions de l'inéquation $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + 2 < 0$.

3 — 1,25 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^{x} - 3x)$ et $\lim_{x \to -\infty} (x+1)\mathrm{e}^{x}$.

INDICE

Pour la première limite, factoriser par x ; pour la seconde, développer.

Exercice 3 — 7 pts

Étude d'une fonction comportant un logarithme

Les parties A et B se suivent : le signe obtenu dans la partie A sert dans la partie B.

A.1 — 0,75 pts

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Calculer $g(1)$, puis montrer que g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

A.2 — 0,5 pts

En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

B.1 — 1,25 pts

Partie B. On étudie maintenant $f : x \mapsto x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$; on note $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm. Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat, puis calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

B.2 — 1 pts

On note (D) la droite d'équation $y = x - 1$. Montrer que (D) est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$, puis étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).

B.3 — 1,5 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire les variations de f, dresser son tableau de variations et justifier que $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

INDICE

Calculer d'abord la dérivée de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ avec la formule du quotient.

B.4 — 0,75 pts

Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point B d'abscisse e. Que peut-on dire des droites (T) et (D) ?

B.5 — 1,25 pts

Tracer (D), (T) et $(\mathcal{C}_f)$ dans ce repère, pour $x \in]0\,;\,5]$.

Exercice 4 — 4,5 pts

Demande et recette

Une entreprise fictive vend des lampes solaires. Lorsque le prix d'une lampe est de p centaines de dirhams, avec $1 \leq p \leq 6$, la quantité demandée par les clients est de $D(p)$ milliers de lampes, où $D(p) = 6\mathrm{e}^{1-0{,}5p}$. On admet que toute la quantité demandée est vendue.

1 — 0,75 pts

Calculer $D(2)$, puis montrer que la fonction D est strictement décroissante sur $[1\,;\,6]$. Interpréter ce sens de variation.

2 — 1 pts

Déterminer les prix p de $[1\,;\,6]$ pour lesquels la demande est strictement inférieure à 2 milliers de lampes. Donner une valeur approchée à $0{,}001$ près de ce prix seuil, exprimé en centaines de dirhams.

INDICE

Isoler l'exponentielle, puis appliquer la fonction ln, strictement croissante.

3 — 0,5 pts

La recette $R(p)$, en centaines de milliers de dirhams, est le produit du prix d'une lampe par la quantité vendue. Justifier que $R(p) = 6p\mathrm{e}^{1-0{,}5p}$ et calculer $R(2)$.

4 — 1,5 pts

Vérifier que la dérivée de la recette s'écrit $R'(p) = 3(2-p)\mathrm{e}^{1-0{,}5p}$ sur $[1\,;\,6]$. Étudier son signe et en déduire le tableau de variations de R.

5 — 0,75 pts

Quel prix l'entreprise doit-elle fixer pour que sa recette soit maximale ? Préciser alors la recette et le nombre de lampes vendues. Exprimer le prix en dirhams.

SOURCES

BURHAN