BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 1

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La calculatrice non programmable est autorisée. Les réponses doivent être justifiées ; la clarté de la rédaction entre dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 4,75 pts

Limites, continuité et dérivabilité en un point

Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1.a — 0,5 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - x + 2}{1 - 2x^2}$.

1.b — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$.

INDICE

Le nombre 3 annule le numérateur et le dénominateur : factoriser chacun par $x - 3$.

1.c — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

INDICE

Écrire $x - 4 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$ et simplifier.

2.a — 0,75 pts

Soit a un nombre réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calculer $\lim_{x \to 2^+} g(x)$.

2.b — 1,25 pts

Calculer $g(2)$ en fonction de a, puis déterminer la valeur de a pour laquelle g est continue en 2.

2.c — 0,75 pts

On suppose $a = 4$. Calculer $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ et $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2}$. La fonction g est-elle dérivable en 2 ?

INDICE

Pour $x > 2$, utiliser l'expression simplifiée de $g(x)$ obtenue à la question 2.a.

Exercice 2 — 4,25 pts

Valeurs intermédiaires et fonction réciproque

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $I = [1\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x^3 - 3x - 3$.

1.a — 0,25 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

1.b — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in I$, $h'(x) = 3(x-1)(x+1)$, puis en déduire que h est strictement croissante sur I et dresser son tableau de variations.

2 — 1 pts

Prouver que l'équation $h(x) = 0$ possède une seule solution α appartenant à I, puis justifier l'encadrement $2 < \alpha < 3$.

3 — 0,75 pts

Calculer $h(2{,}1)$ et $h(2{,}2)$, puis en déduire un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$.

INDICE

Calculer les deux images à la calculatrice et comparer leurs signes.

4.a — 0,5 pts

Justifier que h possède une fonction réciproque h^{-1} et préciser l'intervalle J sur lequel h^{-1} est définie.

4.b — 1 pts

Calculer $h^{-1}(-1)$, puis montrer que h^{-1} est dérivable en -1 et calculer $\left(h^{-1}\right)'(-1)$.

Exercice 3 6,5 pts

Étude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $D =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{x-1}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 1 pts

Calculer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement ces résultats.

2.a 0,5 pts

Calculer $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2.b 1 pts

On note (Δ) la droite d'équation $y = x$. Calculer les limites de $f(x) - x$ en $-\infty$ et en $+\infty$; que peut-on en conclure pour (Δ) ? Préciser ensuite la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ).

3.a 1 pts

Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

3.b 1 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur D, puis dresser le tableau de variations de f (on calculera $f(-1)$ et $f(3)$).

4 0,75 pts

Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

5 1,25 pts

Tracer (Δ), (T) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 4 — 4,5 pts

Coût, bénéfice et production optimale

Une entreprise fictive fabrique un engrais. Sa production mensuelle est de q tonnes, avec $0 \leq q \leq 7$. Le coût total de cette production, en milliers de dirhams, est $C(q) = q^3 - 9q^2 + 30q + 10$. On admet que le coût marginal est égal à $C'(q)$.

1 — 0,5 pts

Calculer $C(0)$ et interpréter ce résultat.

2 — 1,25 pts

Calculer le coût marginal $C'(q)$, puis vérifier que $C'(q) = 3(q-3)^2 + 3$. En déduire que le coût total est strictement croissant sur $[0\,;\,7]$.

3 — 0,5 pts

Chaque tonne est vendue 15 milliers de dirhams et toute la production est vendue. Exprimer la recette $R(q)$, puis montrer que le bénéfice est $B(q) = -q^3 + 9q^2 - 15q - 10$.

4 — 1,5 pts

Vérifier que $B'(q) = -3(q-1)(q-5)$ sur $[0\,;\,7]$, puis étudier les variations de B et les résumer dans un tableau.

5 — 0,75 pts

Quelle quantité l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour que son bénéfice soit maximal ? Préciser ce bénéfice maximal.

SOURCES

BURHAN