BURHAN

Résumé : Dérivation et étude de fonctions

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivation-etude-fonctions/resume

Chapitre	Semestre
Dérivation et étude de fonctions	Semestre 1

Nombre dérivé, tangente, approximation affine

Définition : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux de variation

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite **finie** quand x tend vers a, avec $x \neq a$. Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$.

En posant $x = a+h$, on a aussi :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Méthode : nombre dérivé par le taux de variation

1. **Pose** le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, avec $h \neq 0$.
2. **Transforme** le numérateur : développe, réduis, ou utilise le conjugué en présence d'une racine. Le but est de mettre h en facteur.
3. **Simplifie** par h, puis fais tendre h vers 0.
4. **Conclus** : une limite finie donne $f'(a)$. Une limite infinie, ou aucune limite, signifie que f n'est pas dérivable en a.

Définition : Tangente à une courbe

Soit f une fonction dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère. La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a;f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$. Elle a pour équation

$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a).$$

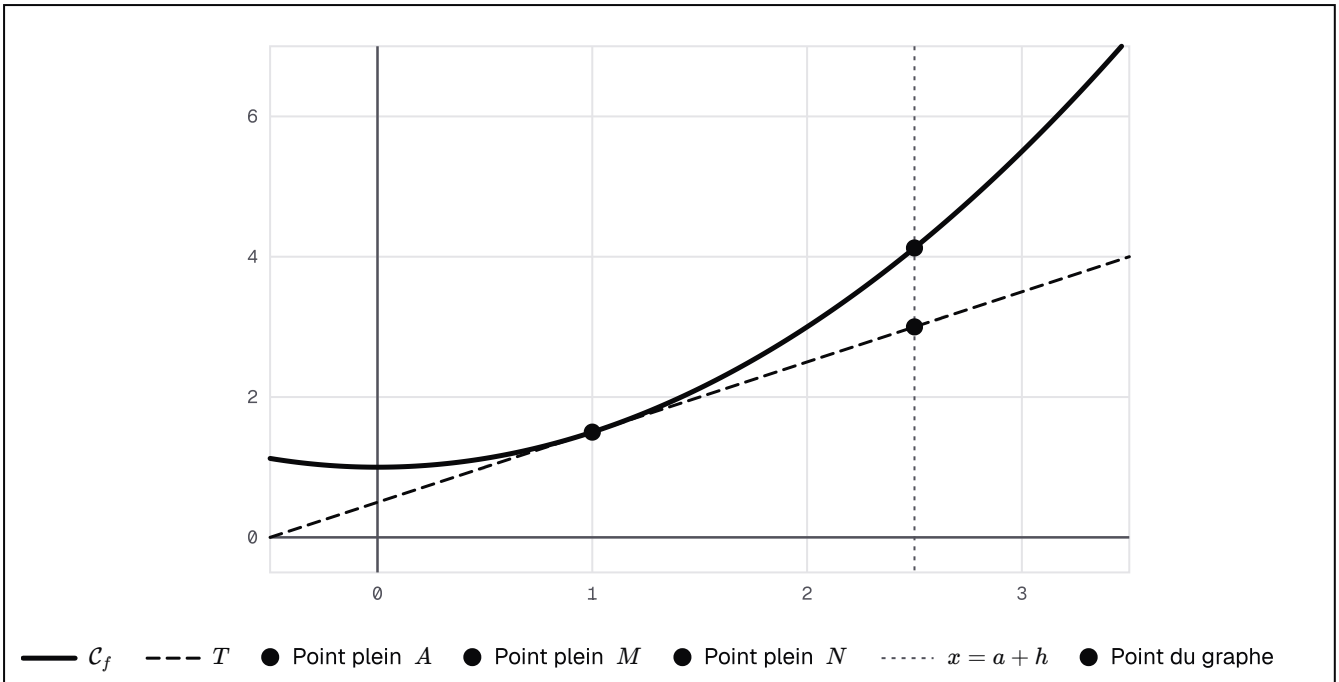
Si $f'(a) = 0$, la tangente est **horizontale**.

Définition : Approximation affine

Soit f une fonction dérivable en a. Pour h proche de 0, le réel $f(a) + f'(a)\,h$ est appelé **approximation affine** de $f(a+h)$; on écrit

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h.$$

Graphiquement, on remplace, près du point d'abscisse a, la courbe par sa tangente en ce point.



L'approximation affine : au point d'abscisse a + h, la hauteur f(a + h) est lue sur la courbe (point M), la hauteur f(a) + f'(a)h sur la tangente en A (point N). L'écart MN est petit quand h l'est.

Méthode : tangente et approximation affine

1. **Calcule** les deux nombres utiles : $f(a)$ et $f'(a)$.
2. **Remplace** dans $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$, puis réduis sous la forme $y = mx + p$.
3. **Vérifie** que le point $A(a\,;\,f(a))$ est bien sur la droite obtenue.
4. **Approche** $f(a+h)$, pour h petit, par $f(a) + f'(a)\,h$. Pour un coût, $f'(a)$ approche le coût de l'unité qui suit la quantité a.

Exemple

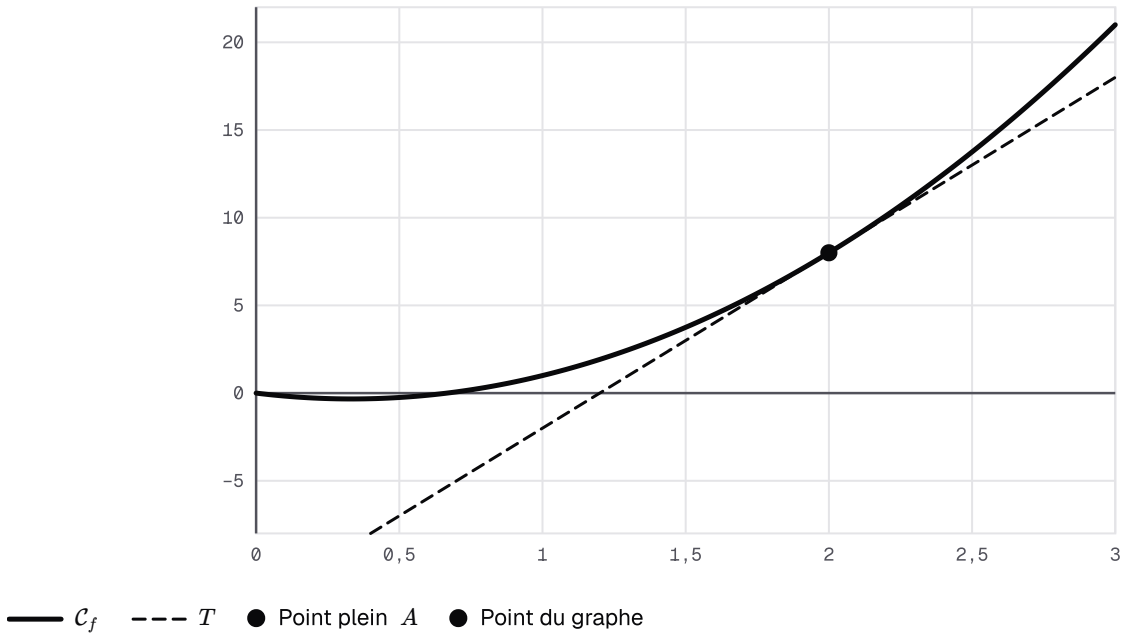
Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x$. Calcule $f'(2)$, puis la tangente en 2.

Taux. $f(2+h) = 8 + 10h + 3h^2$ et $f(2) = 8$. Pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 10 + 3h.$$

Limite. D'après la limite d'une somme, $10 + 3h$ tend vers 10 quand h tend vers 0 : $f'(2) = 10$.

Tangente. $y = 10(x-2)+8$, soit $y = 10x - 12$.



La courbe de f : x ↦ 3x² – 2x et sa tangente au point A d'abscisse 2, d'équation y = 10x – 12 : le coefficient directeur 10 est le nombre dérivé f'(2).

Exemple

Situation fictive. Une entreprise fictive a un coût total $C(q) = 0{,}5q^2 + 4q + 100$, en dirhams, pour q unités.

Estimation. $C'(q) = q + 4$, donc $C'(100) = 104$. L'approximation affine estime le coût de la cent unième unité à 104 dirhams.

Contrôle. Le calcul exact donne $C(101) - C(100) = 104{,}5$ dirhams : l'estimation est proche.

Dérivabilité à droite, à gauche ; dérivabilité et continuité

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche ; demi-tangentes

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; a+\alpha[$, avec $\alpha > 0$. On dit que f est **dérivable à droite** en a lorsque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a avec $x > a$. Cette limite est le **nombre dérivé à droite** de f en a, noté $f'_d(a)$. On définit de même, sur $]a-\alpha ; a]$, la **dérivabilité à gauche** et le nombre $f'_g(a)$.

La courbe de f admet alors au point $A(a ; f(a))$ une **demi-tangente** à droite de coefficient directeur $f'_d(a)$ (à gauche : $f'_g(a)$). Si f est continue en a et si le taux de variation tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ d'un côté, la courbe admet en A, de ce côté, une **demi-tangente verticale**.

Propriété : Dérivabilité et nombres dérivés à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a, avec $f'_d(a) = f'_g(a)$. On a alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Si f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, le point $A(a; f(a))$ est un **point anguleux** de la courbe : les deux demi-tangentes n'ont pas la même direction.

Remarque : Admis

Le résultat « Dérivabilité et nombres dérivés à droite et à gauche » est admis : on l'utilise sans le démontrer.

Théorème : Dérivabilité et continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en a sans y être dérivable.

Méthode : dérivabilité à droite et à gauche

1. **Repère** le réel a où la formule change : recollement de deux expressions, valeur absolue, racine qui s'annule.
2. **Calcule** la limite du taux de variation à droite de a, avec l'expression valable pour $x > a$.
3. **Calcule** la limite à gauche, avec l'expression valable pour $x < a$.
4. **Conclus** : deux limites finies égales, f est dérivable en a ; deux limites finies distinctes, point anguleux ; une limite infinie, demi-tangente verticale de ce côté.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

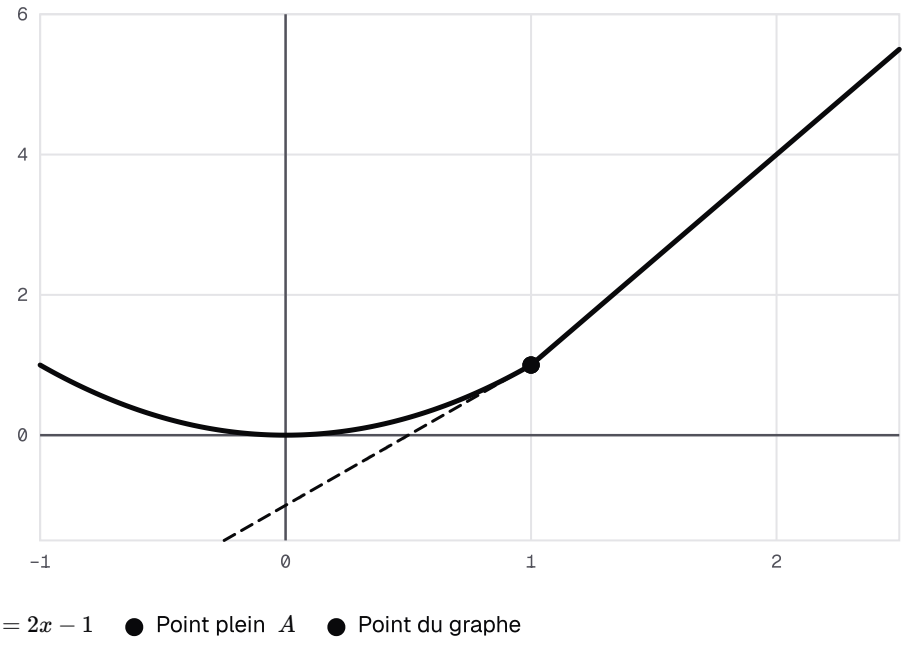
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étudie la dérivabilité de f en 1.

À gauche. Pour $h < 0$: $\dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h$, qui tend vers 2. Donc $f'_g(1) = 2$.

À droite. Pour $h > 0$: $\dfrac{3(1+h) - 2 - 1}{h} = 3$. Donc $f'_d(1) = 3$.

Conclusion. Les deux nombres diffèrent : f n'est pas dérivable en 1, et le point $A(1;1)$ est un point anguleux.



Le point anguleux A(1 ; 1) : à gauche, la demi-tangente a pour coefficient directeur 2 ; à droite, la courbe est elle-même une demi-droite de coefficient directeur 3.

Attention : Deux nombres dérivés distincts : pas de nombre dérivé

Exister des deux côtés ne suffit pas. Pour $x \mapsto |2x + 6|$ en -3, le taux vaut 2 à droite et -2 à gauche. Les deux demi-tangentes ont des directions différentes : la courbe a un point anguleux en $(-3;0)$, sans nombre dérivé.

Attention : Une fonction continue peut ne pas être dérivable

La fonction $x \mapsto \sqrt{x-4}$ est continue à droite en 4. Pourtant, pour $h > 0$, son taux vaut $\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, qui tend vers $+\infty$. Elle n'est donc pas dérivable à droite en 4 : la courbe y a une demi-tangente verticale. Dérivable entraîne continue, pas l'inverse.

Fonction dérivée, opérations et composée

Définition : Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est **dérivable sur** I lorsqu'elle est dérivable en tout réel x de I. La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f ; on la note f'.

Sur un intervalle $[a;b]$, on dit que f est dérivable lorsqu'elle est dérivable sur $]a;b[$, à droite en a et à gauche en b.

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Les fonctions suivantes sont dérivables sur les intervalles indiqués, avec pour dérivées :

- $x \mapsto k$, où k est un réel : dérivée $x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$;
- $x \mapsto x$: dérivée $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$;
- $x \mapsto x^n$, où n est un entier tel que $n \geq 2$: dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$;
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$: dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$: dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

La fonction racine carrée n'est pas dérivable à droite en 0.

Propriété : Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, k un réel et n un entier tel que $n \geq 1$. Les fonctions suivantes sont dérivables sur I :

- $(u+v)' = u' + v'$ et $(k\,u)' = k\,u'$;
- $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$;
- $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$;
- si v ne s'annule pas sur I : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$.

En particulier, toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Propriété : Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(x)$ appartient à J pour tout x de I. Alors la fonction $g \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I,

$$\begin{aligned}&(g \circ u)'(x)\\ &= u'(x) \times g'\big(u(x)\big).\end{aligned}$$

Deux cas particuliers :

- si a et b sont des réels, la fonction $x \mapsto g(ax+b)$ a pour dérivée $x \mapsto a\,g'(ax+b)$;
- si u est dérivable et **strictement positive** sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Remarque : Admis

Ces résultats sont admis : « Dérivées des fonctions usuelles » ; « Opérations sur les fonctions dérivables » ; « Dérivée d'une fonction composée ». On les utilise sans les démontrer.

Méthode : dériver en reconnaissant la forme

1. **Donne** l'intervalle de travail : aucun dénominateur nul, une quantité strictement positive sous la racine.
2. **Identifie** la forme : somme, produit $u\,v$, quotient $\dfrac{u}{v}$, puissance u^n, $g(ax+b)$ ou $\sqrt{u}$.
3. **Écris** u, v, u' et v' à part, puis applique la bonne formule.
4. **Factorise** le résultat : le signe d'un produit se lit facteur par facteur.

Exemple

Quotient. Soit f la fonction définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$. Pour tout $x>3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-3)-(2x+1)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{-7}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

Puissance. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(1-4x)^3$. La fonction intérieure a pour dérivée -4 : pour tout réel x, $g'(x)=-12\,(1-4x)^2$.

Racine. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=\sqrt{x^2+5}$; on a $x^2+5>0$. Pour tout réel x :

$$k'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Attention : Dérivée d'un produit : deux termes

Prends $u(x)=x^2$ et $v(x)=x+1$. Le produit x^3+x^2 a pour dérivée $3x^2+2x$. Le produit des dérivées donne $2x\times 1=2x$, un autre résultat. Utilise toujours $u'\,v+u\,v'$.

Attention : Composée : multiplier par la dérivée de l'intérieur

Pour $x\mapsto(5-2x)^3$, la dérivée est $3\times(-2)\times(5-2x)^2=-6\,(5-2x)^2$. Écrire $3\,(5-2x)^2$ oublie le facteur -2, dérivée de $5-2x$. Ce facteur change même le signe.

Attention : Racine d'une fonction : attention aux zéros

Pour $x \mapsto \sqrt{9-x^2}$, la formule donne $\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$, valable sur $]-3;3[$ seulement. En -3 et en 3, la quantité sous la racine est nulle : le quotient n'a plus de sens. Là, il faut revenir au taux de variation, d'un seul côté.

Dérivée de la fonction réciproque

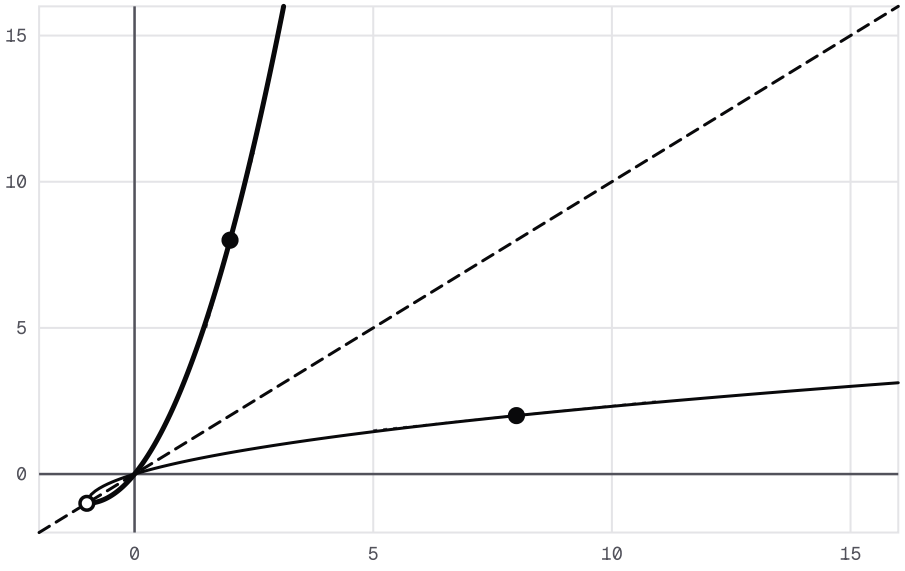
Théorème : Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et f^{-1} sa fonction réciproque, définie sur l'intervalle $J = f(I)$. Soit a un réel de I et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(b) &= \frac{1}{f'(a)} \\ &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.\end{aligned}$$

Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Rappel : f^{-1} a le même sens de variation que f, et sa courbe est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.



$\mathcal{C}_g$ $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ $y = x$ Point plein A Point plein A' Point du graphe
Point exclu du graphe

Avec g : x ↦ x² + 2x, la tangente en A(2 ; 8) monte de 6 pour 1, et la tangente symétrique en A'(8 ; 2), sur la courbe de la réciproque, monte de 1 pour 6 : les coefficients directeurs sont inverses.

Borne exclue en x = −1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ −1.

Remarque : Admis

Le résultat « Dérivée de la fonction réciproque » est admis : on l'utilise sans le démontrer.

Méthode : nombre dérivé de la réciproque

1. **Justifie** que f est continue et strictement monotone sur I ; détermine $J = f(I)$.
2. **Cherche** l'antécédent : le réel a de I tel que $f(a) = b$.
3. **Contrôle** que $f'(a) \neq 0$, puis conclus : $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
4. **Dessine** la courbe de f^{-1} par symétrie d'axe la droite $y = x$.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

Monotonie. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont celles de x^3, donc $J = \mathbb{R}$.

Antécédent. $f(1) = 2$ et $f'(1) = 5 \neq 0$.

Conclusion. $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{5}$.

Signe de la dérivée, variations, extremums

Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors f est croissante sur I ; si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I. De même, si $f'(x) < 0$ sauf en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I, alors f est constante sur I.

Ces conclusions valent encore sur un intervalle $[a ; b]$ lorsque f est continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$ (de même avec un intervalle semi-ouvert).

Définition : Extremums d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I lorsque $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I ; c'est le **minimum** de f sur I lorsque $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I.

- $f(a)$ est un **maximum local** de f lorsqu'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de $I \cap J$. On définit de même un **minimum local**.

Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**.

Propriété : Dérivée en un extremum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse : $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour que f admette un extremum en a.

Remarque : Admis

Ces résultats sont admis : « Signe de la dérivée et variations » ; « Dérivée en un extremum ». On les utilise sans les démontrer.

Propriété : Extremum et changement de signe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a un réel de I et α un réel strictement positif tel que $]a-\alpha; a+\alpha[$ soit inclus dans I.

- Si $f'(x) \geq 0$ sur $]a-\alpha; a]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[a; a+\alpha[$, alors $f(a)$ est un maximum local de f.
- Si $f'(x) \leq 0$ sur $]a-\alpha; a]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[a; a+\alpha[$, alors $f(a)$ est un minimum local de f.

On dit alors que f' s'annule en a **en changeant de signe**.

Méthode : tableau de variations

1. **Écris** l'ensemble de définition, puis l'intervalle où f est dérivable.
2. **Calcule** $f'(x)$ sous forme factorisée.
3. **Place** chaque facteur sur une ligne du tableau de signes ; la règle des signes donne le signe de $f'(x)$.
4. **Déduis** les variations intervalle par intervalle, en citant le signe de f'. Ajoute les valeurs aux bornes et les extremums.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$.

Dérivée. Pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x-3)(x+2)$.

x	$]-\infty;-2]$	$[-2;3]$	$[3;+\infty[$
signe de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
variations de f	croissante	décroissante	croissante

Extremums. f' s'annule en changeant de signe en -2 et en 3. Donc $f(-2)=54$ est un maximum local et $f(3)=-71$ un minimum local.

Attention : Un signe de dérivée vaut sur un intervalle

Pour $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$, la dérivée $\dfrac{-1}{(x-2)^2}$ est strictement négative sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$. La fonction est décroissante sur chacun de ces intervalles, mais pas sur leur réunion : $1<3$, et pourtant l'image de 1 vaut -1, celle de 3 vaut 1.

Attention : Une dérivée nulle ne suffit pas

Soit $x \mapsto (x-1)^3+2$. Sa dérivée $3(x-1)^2$ s'annule en 1, mais reste positive des deux côtés. La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: aucun extremum en 1. Seul un changement de signe de la dérivée garantit un extremum.

Problèmes d'optimisation en économie

Méthode : optimiser un coût ou un bénéfice

1. **Nomme** la variable, par exemple la quantité q, et son intervalle imposé par la situation.
2. **Écris** la grandeur à rendre maximale ou minimale : bénéfice $B(q)=R(q)-C(q)$, coût moyen $C_M(q)=\dfrac{C(q)}{q}$.
3. **Dresse** son tableau de variations sur cet intervalle, par le signe de la dérivée.
4. **Réponds** en une phrase : la quantité, la valeur optimale et l'unité.

Exemple

Situation fictive. Une entreprise fictive a un coût total $C(q)=q^2+2q+400$, en dirhams, pour q dans $]0;60]$.

Coût moyen. Pour tout q de $]0;60]$, $C_M(q)=q+2+\dfrac{400}{q}$ et :

$$\begin{aligned} C_M'(q) &= 1-\frac{400}{q^2} \\ &= \frac{(q-20)(q+20)}{q^2}. \end{aligned}$$

Variations. $C'_M(q) \leq 0$ sur $]0;20]$: C_M y est décroissante. $C'_M(q) \geq 0$ sur $[20;60]$: elle y est croissante.

Réponse. Le coût moyen est minimal pour 20 unités ; il vaut alors 42 dirhams par unité.

Dérivée seconde, concavité, points d'inflexion

Définition : Dérivée seconde, concavité et point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la fonction f' est elle-même dérivable sur I, sa dérivée est la **dérivée seconde** de f, notée f''.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I lorsqu'elle est située au-dessus de chacune de ses tangentes en un point d'abscisse appartenant à I ; elle est **concave** sur I lorsqu'elle est située au-dessous de chacune de ces tangentes.

Le point $A(a;f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ lorsque la courbe change de concavité en A : elle y traverse sa tangente.

Propriété : Concavité et signe de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Propriété : Point d'inflexion et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque : Admis

Ces résultats sont admis : « Concavité et signe de la dérivée seconde » ; « Point d'inflexion et dérivée seconde ». On les utilise sans les démontrer.

Méthode : concavité et points d'inflexion

1. **Dérive** deux fois : f'' est la dérivée de f'.
2. **Cherche** le signe de $f''(x)$ sur chaque intervalle.
3. **Traduis** : f'' positive, courbe convexe ; f'' négative, courbe concave.

4. **Repère** les réels où f'' change de signe en s'annulant. Chacun donne un point d'inflexion, dont tu calcules l'ordonnée.

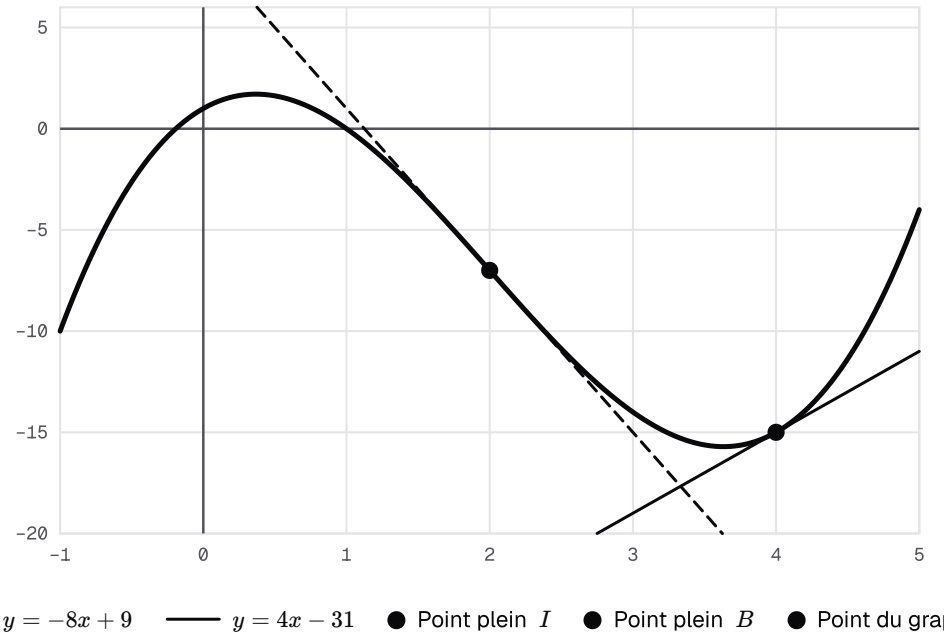
Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 1$.

Dérivées. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$, puis $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$.

Signe. $f''(x) < 0$ sur $]-\infty; 2[$: la courbe y est concave. $f''(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$: elle y est convexe.

Inflexion. f'' s'annule en 2 en changeant de signe, et $f(2) = -7$: le point $I(2; -7)$ est un point d'inflexion.



La courbe de f : x ↦ x³ − 6x² + 4x + 1, concave avant 2 et convexe après. Au point I(2 ; −7), elle traverse sa tangente ; en B, d'abscisse 4, elle reste au-dessus de la sienne.

Branches infinies

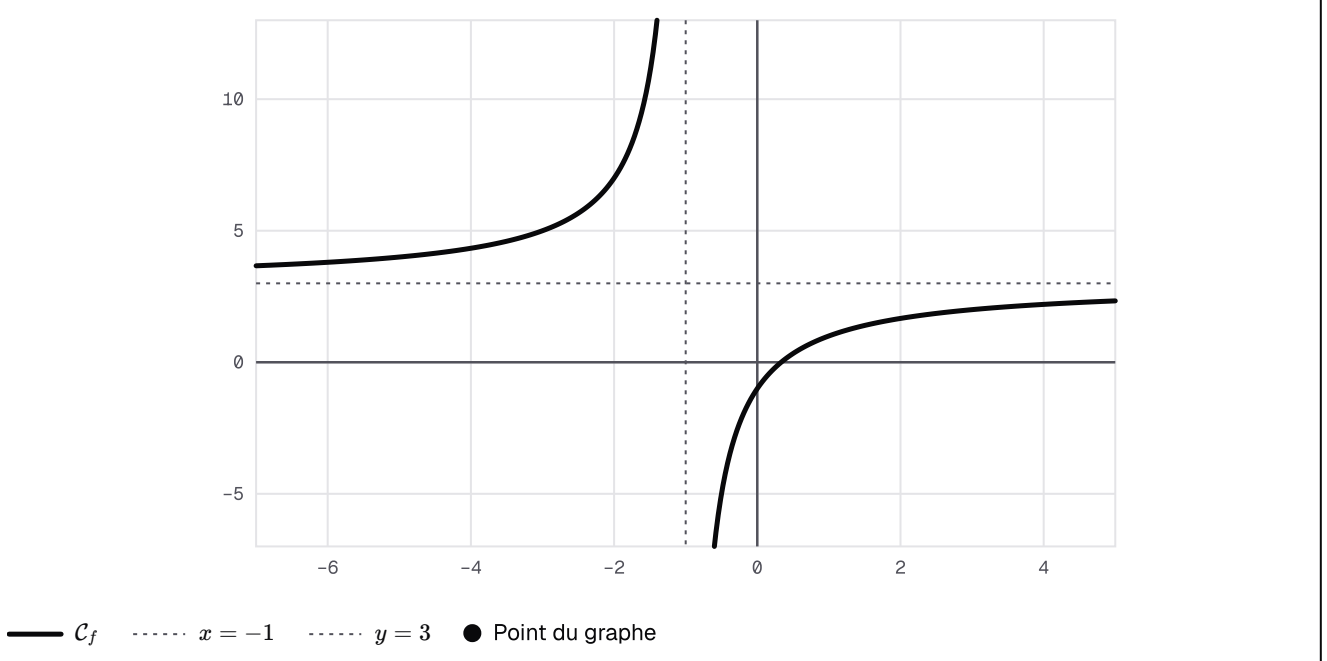
Définition : Asymptotes à une courbe

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers le réel x_0 (à droite ou à gauche), la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, où b est un réel, la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

- Si $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$, où a et b sont des réels avec $a\neq 0$, la droite d'équation $y=ax+b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

On définit de même les asymptotes au voisinage de $-\infty$.



Asymptote verticale et asymptote horizontale : la courbe de x ↦ (3x − 1)/(x + 1) longe la droite d'équation x = −1 et se rapproche de la droite d'équation y = 3 à l'infini.

Propriété : Recherche d'une asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c;+\infty[$, et a et b deux réels avec $a\neq 0$. La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b.$$

On a le même résultat au voisinage de $-\infty$.

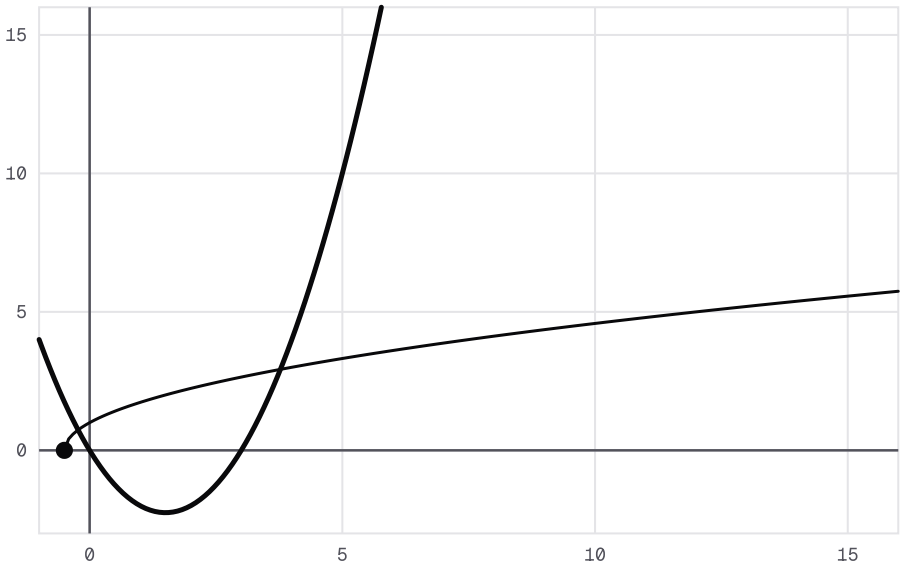
Définition : Branches paraboliques

Soit f une fonction telle que $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0, elle admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.

- Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers un réel a non nul et si $f(x) - ax$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, elle admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

On définit de même les branches paraboliques au voisinage de $-\infty$.



$y = x^2 - 3x$ $y = \sqrt{2x+1}$ Point du graphe

Pour x ↦ x² − 3x, le quotient f(x)/x tend vers +∞ : la branche se redresse. Pour x ↦ √(2x + 1), il tend vers 0 : la branche se couche.

Méthode : branches infinies

1. **Bornes réelles** du domaine : une limite infinie donne une asymptote verticale.
2. **À l'infini**, une limite réelle b donne l'asymptote horizontale $y = b$.
3. **Limite infinie** : cherche la limite de $\frac{f(x)}{x}$. Infinie, branche dirigée par l'axe des ordonnées ; nulle, branche dirigée par l'axe des abscisses.
4. **Limite réelle** $a \neq 0$: étudie $f(x) - ax$. Une limite réelle b donne l'asymptote $y = ax + b$. Une limite égale à $+\infty$ ou à $-\infty$ donne une branche parabolique de direction la droite $y = ax$.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x-1}$, et la droite $(D) : y = 2x - 1$.

En 1. Quand x tend vers 1 avec $x > 1$, $\frac{3}{x-1}$ tend vers $+\infty$. Par somme, $f(x)$ tend vers $+\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale.

À l'infini. $f(x)-(2x-1)=\dfrac{3}{x-1}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ (limite de l'inverse). La droite (D) est asymptote oblique.

Position. Cette différence a le signe de $x-1$. Sur $]1;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) ; sur $]-\infty;1[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous. Aucun point commun.

Attention : Une seule limite ne donne pas l'asymptote

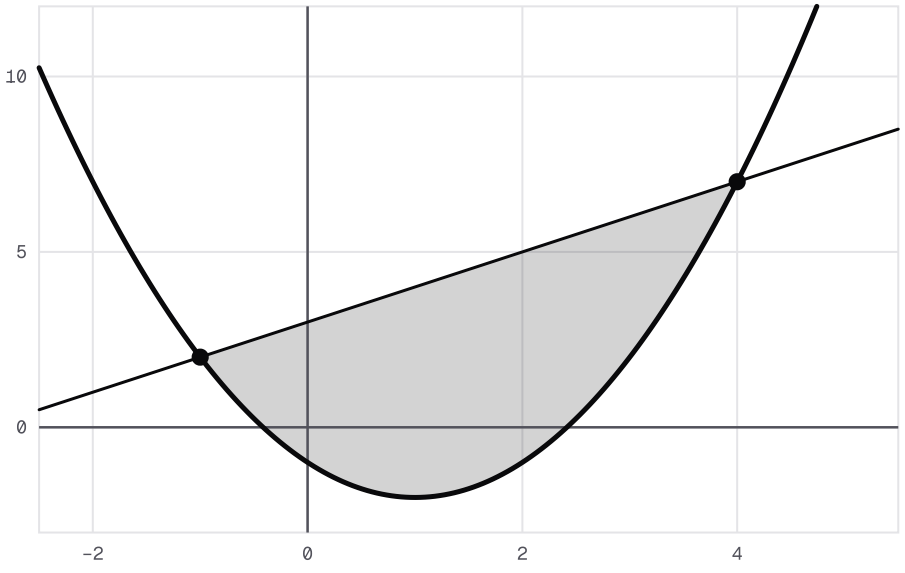
Pour $x\mapsto 3x-\sqrt{x}$, le quotient par x vaut $3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et tend vers 3. Mais la différence avec $3x$ vaut $-\sqrt{x}$ et tend vers $-\infty$. Il n'y a pas d'asymptote : c'est une branche parabolique de direction la droite $y=3x$.

Position relative et résolution graphique

Définition : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et (D) la droite d'équation $y=ax+b$. On dit que $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I lorsque $f(x)-(ax+b)\geq 0$ pour tout x de I, et **au-dessous** de (D) sur I lorsque $f(x)-(ax+b)\leq 0$ pour tout x de I. Les points communs à $\mathcal{C}_f$ et à (D) ont pour abscisses les solutions de l'équation $f(x)=ax+b$.

De même, la position de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se lit sur le signe de $f(x)-g(x)$.



Position d'une courbe et d'une droite : la parabole de x ↦ x² − 2x − 1 est sous la droite d'équation y = x + 3 entre les abscisses −1 et 4 (bande teintée), au-dessus ailleurs.

Méthode : position d'une courbe et d'une droite

1. **Calcule** la différence $d(x) = f(x) - (ax + b)$ et simplifie-la.
2. **Étudie** son signe, au besoin dans un tableau de signes.
3. **Lis** le résultat : $d(x) > 0$, courbe au-dessus de la droite ; $d(x) < 0$, au-dessous ; $d(x) = 0$, point commun.

Méthode : résoudre graphiquement

1. **Équation** $f(x) = g(x)$: relève les abscisses des points communs aux deux courbes.
2. **Inéquation** $f(x) \geq g(x)$: garde les abscisses où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$, ou la rencontre.
3. **Signe** de $f(x)$: compare la courbe à l'axe des abscisses.
4. **Précise** que la lecture sur un graphique ne donne que des valeurs approchées.

Plan d'étude d'une fonction

Méthode : le plan d'étude

1. **Domaine** de définition ; une symétrie éventuelle réduit l'intervalle d'étude.
2. **Limites** aux bornes, puis branches infinies.
3. **Dérivée**, son signe et le tableau de variations.
4. **Dérivée seconde**, si l'énoncé la demande : concavité, inflexions.
5. **Points utiles** : intersections avec les axes, tangentes, position par rapport aux asymptotes.
6. **Tracé** : d'abord les asymptotes et les tangentes, puis la courbe, fidèle au tableau.

Propriété : Signe d'une fonction et tableau de variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si f admet sur I un minimum m strictement positif, alors $f(x) > 0$ pour tout x de I. Si f admet sur I un maximum M strictement négatif, alors $f(x) < 0$ pour tout x de I.
- Si f est strictement croissante sur I et si $f(\beta) = 0$ pour un réel β de I, alors $f(x) < 0$ pour tout x de I tel que $x < \beta$, et $f(x) > 0$ pour tout x de I tel que $x > \beta$. Si f est strictement décroissante, les signes sont échangés.

Exemple

Énoncé. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x - 4$. Donne le signe de $g(x)$.

Variations. Pour tout réel x, $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Zéro. $g(1) = 1 + 3 - 4 = 0$.

Signe. D'après la propriété du signe lu sur les variations, $g(x) < 0$ pour $x < 1$ et $g(x) > 0$ pour $x > 1$.

Quelle technique pour quelle question ?

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Nombre dérivé** par la définition : le taux de variation, simplifié par h.
- **Tangente** : $y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$; **coût marginal** : la dérivée du coût.
- **Dérivabilité** en un point de recollement : les deux côtés séparément.
- **Dérivée** : reconnaître la forme, puis factoriser.
- **Réciproque** : l'inverse du nombre dérivé en l'antécédent.
- **Variations** : le signe de f', intervalle par intervalle.
- **Optimisation** : le tableau de variations sur l'intervalle de la situation.
- **Concavité** : le signe de f''.
- **Asymptotes** : des limites, avec $\dfrac{f(x)}{x}$ puis $f(x) - ax$ à l'infini.
- **Position** : le signe d'une différence.
- **Rédaction** : pour une variation, le signe de f' et l'intervalle ; pour une limite, l'opération ; à la fin, une phrase qui répond, avec l'unité.

Puissance, n entier, n au moins 2

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

Inverse, x non nul

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Racine carrée, x strictement positif

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Produit

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$

Quotient, v non nulle

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

Racine d'une fonction strictement positive

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Fonction affine à l'intérieur

$$\big(g(ax+b)\big)' = a\,g'(ax+b)$$

Tangente au point d'abscisse a

$$y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$