BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Coût moyen minimal d'une fabrique de sacs

Durée indicative : 20 minutes.

Une fabrique fictive de sacs en cuir produit q dizaines de sacs par jour, avec $0 < q \leq 40$. Son coût total, en centaines de dirhams, est $C(q) = 2q^2 + 10q + 450$ (données fictives). Le coût moyen d'une dizaine de sacs est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$, en centaines de dirhams par dizaine de sacs.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout q de $]0;40]$, $C_M(q) = 2q + 10 + \dfrac{450}{q}$.

INDICE

Outil : divise chaque terme de $C(q)$ par q.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout q de $]0;40]$, $C_M'(q) = \dfrac{2(q-15)(q+15)}{q^2}$.

INDICE

Outil : la dérivée de $q \mapsto \dfrac{1}{q}$ est $q \mapsto -\dfrac{1}{q^2}$. **Ensuite :** réduis au dénominateur q^2.

3. 1 pts

Montrer que C_M est décroissante sur $]0;15]$ et croissante sur $[15;40]$.

INDICE

Outil : sur $]0;40]$, $2(q+15)$ et q^2 sont strictement positifs.

4. 0,75 pts

Montrer que le coût moyen minimal vaut 70 centaines de dirhams par dizaine de sacs, et préciser la production correspondante.

INDICE

Outil : un minimum se lit sur les variations. **Début :** relis la question 3.

5. 0,75 pts

Montrer qu'au minimum du coût moyen, le coût marginal $C'(15)$ est égal au coût moyen $C_M(15)$.

INDICE

Outil : dérive $C(q)$ terme à terme, puis remplace q par 15.

Exercice 2 4 pts

Bénéfice d'un artisan potier

Durée indicative : 20 minutes.

Un artisan potier fictif vend x centaines de vases par mois, avec $0 \leq x \leq 12$, au prix de 80 dirhams le vase. En centaines de dirhams, sa recette est donc $R(x) = 80x$ et son coût total est $C(x) = x^3 - 9x^2 + 32x + 100$ (données fictives). On note $B(x) = R(x) - C(x)$ son bénéfice, en centaines de dirhams.

1. 0,5 pts

Montrer que $B(x) = -x^3 + 9x^2 + 48x - 100$.

INDICE

Point délicat : retranche chaque terme de $C(x)$.

2. 1 pts

Montrer que $B'(x) = -3(x - 8)(x + 2)$ pour tout x de $[0; 12]$.

INDICE

Début : dérive $B(x)$. **Ensuite :** développe $-3(x - 8)(x + 2)$ et compare.

3. 1 pts

Montrer que B est croissante sur $[0; 8]$ et décroissante sur $[8; 12]$.

INDICE

Outil : le signe d'un produit se lit facteur par facteur. **Début :** sur $[0; 12]$, $-3(x + 2) < 0$.

4. 0,75 pts

Montrer que le bénéfice maximal est de 348 centaines de dirhams, et préciser les ventes correspondantes.

INDICE

Outil : un maximum se lit sur les variations. **Début :** relis la question 3.

5. 0,75 pts

Montrer que $B(2) = 24$ et $B(12) = 44$, puis que $B(x) > 0$ pour tout x de $[2; 12]$.

INDICE

Outil : si B est croissante sur $[a; b]$, alors $B(x) \geq B(a)$ pour tout x de $[a; b]$. **Début :** relis les variations de la question 3.

Exercice 3 3 pts

Demi-tangente verticale, tangente et estimation

Durée indicative : 15 minutes.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=(x+2)\sqrt{x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1. 0,75 pts

Montrer que, pour $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$. En déduire que f n'est pas dérivable à droite en 0, et interpréter.

INDICE

Début : $f(0)=0$ et $\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **Ensuite :** cherche la limite du numérateur et du dénominateur.

2. 1 pts

Montrer que, pour $x>0$, $f'(x)=\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : $(u\,v)'=u'\,v+u\,v'$ et, pour $x>0$, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **Début :** pose $u(x)=x+2$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

3. 0,75 pts

Montrer que la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 a pour équation $y=\dfrac{7}{2}x-2$.

INDICE

Outil : $y=f'(4)\,(x-4)+f(4)$.

4. 0,5 pts

Montrer que l'approximation affine de $f(4{,}02)$ obtenue avec (T) vaut $12{,}07$.

INDICE

Outil : $f(4+h)\approx f(4)+f'(4)\,h$, avec $h=0{,}02$.

Exercice 4 5 pts

Réciproque, asymptote et concavité

Durée indicative : 25 minutes.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1. 0,75 pts

Montrer que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 avec $x>0$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

INDICE

Outil : quand x tend vers 0 avec $x>0$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.

2. 1 pts

Montrer que $f'(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2}$, puis que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : la dérivée de $x\mapsto -\dfrac{1}{x}$ est $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

3. 0,75 pts

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet une réciproque définie sur l'intervalle image. **Début :** utilise les limites de la question 1.

4. 0,75 pts

Calculer $f(1)$, puis montrer que $\left(f^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{3}$.

INDICE

Outil : si $f(a)=b$ et $f'(a)\neq 0$, alors $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$.

5. 1 pts

Montrer que la droite (Δ) : $y=2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et que $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (Δ).

INDICE

Début : calcule $f(x)-2x$.

6. 0,75 pts

Montrer que $f''(x)=-\dfrac{2}{x^3}$, puis que $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : la dérivée de $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x\mapsto -\dfrac{2}{x^3}$. **Début :** pars de $f'(x)=2+\dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 5 — 8 pts

Problème : étude complète d'une fonction rationnelle

Durée indicative : 45 minutes.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-x+7}{x-2}$, de courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé, et (D) la droite d'équation $y=x+1$.

1. — 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x différent de 2, on peut écrire $f(x)$ sous la forme $x+1+\dfrac{9}{x-2}$.

INDICE

Outil : réduis $x+1+\dfrac{9}{x-2}$ au dénominateur $x-2$.

2. — 1 pts

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 2 avec $x>2$, et vers $-\infty$ quand x tend vers 2 avec $x<2$. Interpréter.

INDICE

Début : x^2-x+7 tend vers 9. **Point délicat :** le signe de $x-2$ de chaque côté de 2.

3. — 1,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, puis que (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : utilise la forme de la question 1 ; $\dfrac{9}{x-2}$ tend vers 0 à l'infini.

4. — 0,75 pts

Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]2;+\infty[$ et au-dessous de (D) sur $]-\infty;2[$.

INDICE

Outil : la position se lit sur le signe de $f(x)-(x+1)$. **Début :** reprends la différence de la question 3.

5. — 2 pts

Montrer que, pour tout $x\neq 2$, $f'(x)=\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f (on fera apparaître $f(-1)$ et $f(5)$).

INDICE

Outil : $\left(\dfrac{1}{x-2}\right)'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$. **Début :** dérive la forme de la question 1. **Ensuite :** $(x-2)^2-9$ est une différence de deux carrés.

6. 1 pts

Montrer que $f(x) \leq -3$ pour tout $x < 2$, et que $f(x) \geq 9$ pour tout $x > 2$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

INDICE

Outil : un maximum de f sur un intervalle est supérieur ou égal à toutes les valeurs de f sur cet intervalle. **Début :** relis le tableau de la question 5, de chaque côté de 2.

7. 1 pts

Montrer que la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = -8x + 37$. Tracer (D), (T), les asymptotes et $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : $y = f'(3)\,(x - 3) + f(3)$. **Ensuite :** trace d'abord les droites, puis la courbe fidèle au tableau.