BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Coût moyen minimal d'une fabrique de sacs

Durée indicative : 20 minutes.

Une fabrique fictive de sacs en cuir produit q dizaines de sacs par jour, avec $0 < q \leq 40$. Son coût total, en centaines de dirhams, est $C(q) = 2q^2 + 10q + 450$ (données fictives). Le coût moyen d'une dizaine de sacs est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$, en centaines de dirhams par dizaine de sacs.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout q de $]0;40]$, $C_M(q) = 2q + 10 + \dfrac{450}{q}$.

INDICE

Outil : divise chaque terme de $C(q)$ par q.

CORRIGÉ

Calcul. Soit $q \in]0;40]$. Alors $q \neq 0$ et, en divisant chaque terme de $C(q)$ par q :

$$\begin{aligned} C_M(q) &= \frac{2q^2}{q} + \frac{10q}{q} + \frac{450}{q} \\ &= 2q + 10 + \frac{450}{q}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $q \in]0;40]$, $C_M(q) = 2q + 10 + \dfrac{450}{q}$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout q de $]0;40]$, $C_M'(q) = \dfrac{2(q-15)(q+15)}{q^2}$.

INDICE

Outil : la dérivée de $q \mapsto \dfrac{1}{q}$ est $q \mapsto -\dfrac{1}{q^2}$. **Ensuite :** réduis au dénominateur q^2.

CORRIGÉ

Dérivée. Sur $]0;40]$, C_M est la somme d'une fonction affine et de $q \mapsto \dfrac{450}{q}$: elle est dérivable et, pour tout $q \in]0;40]$:

$$\begin{aligned} C_M'(q) &= 2 - \frac{450}{q^2} \\ &= \frac{2q^2 - 450}{q^2}. \end{aligned}$$

Factorisation.

$$\begin{aligned} &2q^2 - 450 \\ &= 2\left(q^2 - 225\right) \\ &= 2(q-15)(q+15). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $q \in]0;40]$, $C_M'(q) = \dfrac{2(q-15)(q+15)}{q^2}$.

3. 1 pts

Montrer que C_M est décroissante sur $]0;15]$ et croissante sur $[15;40]$.

INDICE

Outil : sur $]0;40]$, $2(q+15)$ et q^2 sont strictement positifs.

CORRIGÉ

Signe de $C'_M(q)$. Pour $q \in]0;40]$, $2(q+15) > 0$ et $q^2 > 0$. Donc $C'_M(q)$ a le signe de $q-15$:

- $C'_M(q) \leq 0$ sur $]0;15]$;
- $C'_M(q) \geq 0$ sur $[15;40]$.

Conclusion. D'après le signe de sa dérivée, C_M est décroissante sur $]0;15]$ et croissante sur $[15;40]$.

4. 0,75 pts

Montrer que le coût moyen minimal vaut 70 centaines de dirhams par dizaine de sacs, et préciser la production correspondante.

INDICE

Outil : un minimum se lit sur les variations. **Début :** relis la question 3.

CORRIGÉ

Position du minimum. D'après la question 3, C_M décroît sur $]0;15]$ puis croît sur $[15;40]$. Son minimum sur $]0;40]$ est donc atteint pour $q = 15$.

Valeur.

$$\begin{aligned} C_M(15) &= 30 + 10 + \frac{450}{15} \\ &= 30 + 10 + 30 = 70. \end{aligned}$$

Unités. $q = 15$ dizaines de sacs, soit 150 sacs par jour. Un coût moyen de 70 centaines de dirhams par dizaine de sacs représente $7\,000$ dirhams pour 10 sacs, soit 700 dirhams par sac.

Conclusion. Le coût moyen minimal vaut 70 centaines de dirhams par dizaine de sacs, soit 700 dirhams par sac ; il est atteint pour une production de 150 sacs par jour.

5. 0,75 pts

Montrer qu'au minimum du coût moyen, le coût marginal $C'(15)$ est égal au coût moyen $C_M(15)$.

INDICE

Outil : dérive $C(q)$ terme à terme, puis remplace q par 15.

CORRIGÉ

Coût marginal. C est un polynôme. Pour tout $q \in]0;40]$, $C'(q) = 4q + 10$, donc :

$$C'(15) = 60 + 10 = 70.$$

Comparaison. D'après la question 4, $C_M(15) = 70$. Les deux nombres s'expriment dans la même unité, en centaines de dirhams par dizaine de sacs.

Conclusion. $C'(15) = C_M(15) = 70$: au minimum du coût moyen, le coût marginal est égal au coût moyen.

Exercice 2 4 pts

Bénéfice d'un artisan potier

Durée indicative : 20 minutes.

Un artisan potier fictif vend x centaines de vases par mois, avec $0 \leq x \leq 12$, au prix de 80 dirhams le vase. En centaines de dirhams, sa recette est donc $R(x) = 80x$ et son coût total est $C(x) = x^3 - 9x^2 + 32x + 100$ (données fictives). On note $B(x) = R(x) - C(x)$ son bénéfice, en centaines de dirhams.

1. 0,5 pts

Montrer que $B(x) = -x^3 + 9x^2 + 48x - 100$.

INDICE

Point délicat : retranche chaque terme de $C(x)$.

CORRIGÉ

Calcul. Pour tout $x \in [0;12]$, en retranchant chaque terme de $C(x)$:

$$\begin{aligned} B(x) &= 80x - x^3 + 9x^2 \\ &\quad - 32x - 100 \\ &= -x^3 + 9x^2 + 48x - 100. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in [0;12]$, $B(x)$ est bien égal à $-x^3 + 9x^2 + 48x - 100$.

2. 1 pts

Montrer que $B'(x) = -3(x-8)(x+2)$ pour tout x de $[0;12]$.

INDICE

Début : dérive $B(x)$. **Ensuite :** développe $-3(x-8)(x+2)$ et compare.

CORRIGÉ

Dérivée. B est un polynôme, dérivable sur $[0;12]$. Pour tout $x \in [0;12]$:

$$B'(x) = -3x^2 + 18x + 48.$$

Forme factorisée. Développons la forme proposée :

$$\begin{aligned} &-3(x-8)(x+2) \\ &= -3\left(x^2 - 6x - 16\right) \\ &= -3x^2 + 18x + 48. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in [0;12]$, $B'(x) = -3(x-8)(x+2)$.

3. 1 pts

Montrer que B est croissante sur $[0;8]$ et décroissante sur $[8;12]$.

INDICE

Outil : le signe d'un produit se lit facteur par facteur. **Début :** sur $[0;12]$, $-3(x+2)<0$.

CORRIGÉ

Signe de $B'(x)$. Pour $x\in[0;12]$, $x+2>0$, donc $-3(x+2)<0$. Ainsi $B'(x)$ a le signe contraire de $x-8$:

- $B'(x)\geq 0$ sur $[0;8]$;
- $B'(x)\leq 0$ sur $[8;12]$.

Conclusion. D'après le signe de sa dérivée, B est croissante sur $[0;8]$ et décroissante sur $[8;12]$.

4. 0,75 pts

Montrer que le bénéfice maximal est de 348 centaines de dirhams, et préciser les ventes correspondantes.

INDICE

Outil : un maximum se lit sur les variations. **Début :** relis la question 3.

CORRIGÉ

Position du maximum. D'après la question 3, B croît sur $[0;8]$ puis décroît sur $[8;12]$. Son maximum sur $[0;12]$ est donc atteint pour $x=8$.

Valeur.

$$\begin{aligned} B(8) &= -512+576 \\ &\quad +384-100 \\ &= 348. \end{aligned}$$

Unités. $x=8$ centaines de vases, soit 800 vases par mois ; 348 centaines de dirhams font $34\,800$ dirhams.

Conclusion. Le bénéfice maximal est de 348 centaines de dirhams, soit $34\,800$ dirhams ; il est obtenu pour 800 vases vendus par mois.

5. 0,75 pts

Montrer que $B(2) = 24$ et $B(12) = 44$, puis que $B(x) > 0$ pour tout x de $[2;12]$.

INDICE

Outil : si B est croissante sur $[a;b]$, alors $B(x) \geq B(a)$ pour tout x de $[a;b]$. **Début :** relis les variations de la question 3.

CORRIGÉ

Valeurs.

$$\begin{aligned} B(2) &= -8 + 36 + 96 - 100 \\ &= 24, \\ B(12) &= -1\,728 + 1\,296 \\ &\quad + 576 - 100 \\ &= 44. \end{aligned}$$

Sur $[2;8]$**.** B est croissante, donc, pour tout $x \in [2;8]$, $B(x) \geq B(2) = 24 > 0$.

Sur $[8;12]$**.** B est décroissante, donc, pour tout $x \in [8;12]$, $B(x) \geq B(12) = 44 > 0$.

Conclusion. $B(2) = 24$, $B(12) = 44$ et, pour tout $x \in [2;12]$, $B(x) > 0$: l'artisan est bénéficiaire pour toute vente comprise entre 200 et $1\,200$ vases par mois.

Exercice 3 3 pts

Demi-tangente verticale, tangente et estimation

Durée indicative : 15 minutes.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=(x+2)\sqrt{x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1. 0,75 pts

Montrer que, pour $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$. En déduire que f n'est pas dérivable à droite en 0, et interpréter.

INDICE

Début : $f(0)=0$ et $\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **Ensuite :** cherche la limite du numérateur et du dénominateur.

CORRIGÉ

Taux. $f(0)=2\times 0=0$. Soit $x>0$; comme $\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\frac{(x+2)\sqrt{x}}{x}\\&=\frac{x+2}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 0 avec $x>0$, $x+2$ tend vers 2 et $\sqrt{x}$ tend vers 0 en restant strictement positif : par quotient, le taux tend vers $+\infty$.

Conclusion. Le taux n'a pas de limite réelle : f n'est pas dérivable à droite en 0. Comme f est continue en 0 (produit de fonctions continues), $\mathcal{C}_f$ admet au point $(0;0)$ une demi-tangente verticale.

2. 1 pts

Montrer que, pour $x>0$, $f'(x)=\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : $(u\,v)'=u'\,v+u\,v'$ et, pour $x>0$, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **Début :** pose $u(x)=x+2$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Les fonctions $u:x\mapsto x+2$ et $v:x\mapsto\sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$, donc leur produit f aussi.

Dérivée d'un produit. Soit $x>0$. On a $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sqrt{x}+\frac{x+2}{2\sqrt{x}}\\&=\frac{2x+x+2}{2\sqrt{x}}\\&=\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x}}$.

3. 0,75 pts

Montrer que la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 a pour équation $y = \dfrac{7}{2}x - 2$.

INDICE

Outil : $y = f'(4)\,(x-4) + f(4)$.

CORRIGÉ

Valeurs en 4**.** $f(4) = 6 \times 2 = 12$ et, d'après la question 2, $f'(4) = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$.

Tangente.

$$\begin{aligned} y &= \frac{7}{2}(x-4) + 12 \\ &= \frac{7}{2}x - 14 + 12 \\ &= \frac{7}{2}x - 2. \end{aligned}$$

Conclusion. La tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 a pour équation $y = \dfrac{7}{2}x - 2$.

4. 0,5 pts

Montrer que l'approximation affine de $f(4{,}02)$ obtenue avec (T) vaut $12{,}07$.

INDICE

Outil : $f(4+h) \approx f(4) + f'(4)\,h$, avec $h = 0{,}02$.

CORRIGÉ

Approximation affine. Au voisinage de 4, la courbe est proche de sa tangente (T). Avec $h = 0{,}02$:

$$\begin{aligned} f(4{,}02) &\approx 12 + \frac{7}{2} \times 0{,}02 \\ &= 12 + 0{,}07 = 12{,}07. \end{aligned}$$

Contrôle. La calculatrice donne $f(4{,}02) \approx 12{,}07006$: l'approximation est très bonne.

Conclusion. L'approximation affine de $f(4{,}02)$ obtenue avec (T) vaut $12{,}07$.

Exercice 4 5 pts

Réciproque, asymptote et concavité

Durée indicative : 25 minutes.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1. 0,75 pts

Montrer que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 avec $x>0$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

INDICE

Outil : quand x tend vers 0 avec $x>0$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ

En 0. Quand x tend vers 0 avec $x>0$, $2x$ tend vers 0 et $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, donc $-\dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$. Par somme, $f(x)$ tend vers $-\infty$.

En $+\infty$. $2x$ tend vers $+\infty$ et $-\dfrac{1}{x}$ tend vers 0. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Conclusion. $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 avec $x>0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. 1 pts

Montrer que $f'(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2}$, puis que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : la dérivée de $x\mapsto -\dfrac{1}{x}$ est $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

CORRIGÉ

Dérivée. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2+\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{2x^2+1}{x^2}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x>0$, $2x^2+1>0$ et $x^2>0$, donc $f'(x)>0$.

Conclusion. $f'(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$: f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3. 0,75 pts

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet une réciproque définie sur l'intervalle image. **Début :** utilise les limites de la question 1.

CORRIGÉ

Hypothèses. f est continue sur $]0;+\infty[$, car dérivable, et strictement croissante sur cet intervalle (question 2).

Intervalle image. L'image de $]0;+\infty[$ par f est donc l'intervalle dont les bornes sont les limites de la question 1 :

$$\begin{aligned} &f\left(]0;+\infty[\right) \\ &=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Conclusion. f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

4. 0,75 pts

Calculer $f(1)$, puis montrer que $\left(f^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{3}$.

INDICE

Outil : si $f(a) = b$ et $f'(a) \neq 0$, alors $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

CORRIGÉ

Antécédent de 1. $f(1) = 2 - 1 = 1$.

Nombre dérivé en 1. D'après la question 2, $f'(1) = \dfrac{2+1}{1} = 3 \neq 0$.

Dérivée de la réciproque. f est dérivable en 1, $f(1) = 1$ et $f'(1) \neq 0$: f^{-1} est dérivable en 1 et

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}.$$

Conclusion. $f(1) = 1$ et $\left(f^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{3}$.

5. 1 pts

Montrer que la droite $(\Delta) : y = 2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et que $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (Δ).

INDICE

Début : calcule $f(x) - 2x$.

CORRIGÉ

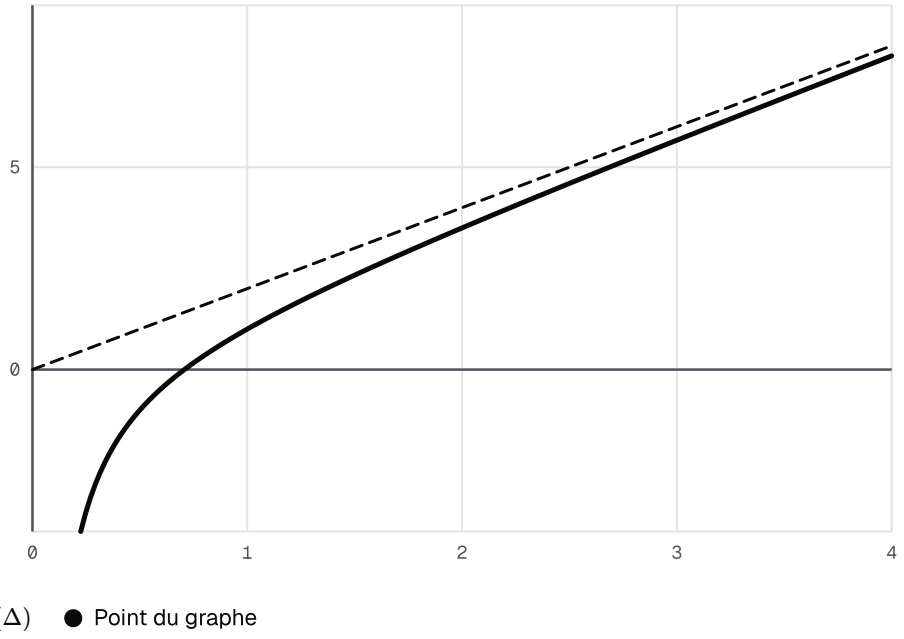
Différence. Pour tout $x > 0$:

$$f(x) - 2x = -\frac{1}{x}.$$

Asymptote. $-\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$: la droite (Δ) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Position. Pour $x > 0$, $-\frac{1}{x} < 0$, donc $f(x) < 2x$.

Conclusion. (Δ) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (Δ) sur $]0; +\infty[$.



Sur]0 ; +∞[, la courbe de f : x ↦ 2x − 1/x est sous la droite (Δ) d'équation y = 2x, et l'écart 1/x tend vers 0.

6. 0,75 pts

Montrer que $f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, puis que $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{2}{x^3}$. **Début :** pars de $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. f' est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 - \frac{2}{x^3} \\ &= -\frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x > 0$, $x^3 > 0$, donc $f''(x) < 0$.

Conclusion. f'' est strictement négative sur $]0;+\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est concave sur cet intervalle.

Exercice 5 8 pts

Problème : étude complète d'une fonction rationnelle

Durée indicative : 45 minutes.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-x+7}{x-2}$, de courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé, et (D) la droite d'équation $y=x+1$.

1. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x différent de 2, on peut écrire $f(x)$ sous la forme $x+1+\dfrac{9}{x-2}$.

INDICE

Outil : réduis $x+1+\dfrac{9}{x-2}$ au dénominateur $x-2$.

CORRIGÉ

Réduction au même dénominateur. Soit $x\neq 2$:

$$\begin{aligned} &x+1+\frac{9}{x-2}\\ &=\frac{(x+1)(x-2)+9}{x-2}\\ &=\frac{x^2-x-2+9}{x-2}\\ &=\frac{x^2-x+7}{x-2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x différent de 2, $f(x)=x+1+\dfrac{9}{x-2}$.

2. 1 pts

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 2 avec $x>2$, et vers $-\infty$ quand x tend vers 2 avec $x<2$. Interpréter.

INDICE

Début : x^2-x+7 tend vers 9. **Point délicat :** le signe de $x-2$ de chaque côté de 2.

CORRIGÉ

Numérateur. Quand x tend vers 2, x^2-x+7 tend vers 9, car $2^2-2+7=9$.

À droite de 2. Pour $x>2$, $x-2$ tend vers 0 en restant strictement positif : par quotient, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

À gauche de 2. Pour $x<2$, $x-2$ tend vers 0 en restant strictement négatif : par quotient, $f(x)$ tend vers $-\infty$.

Conclusion. $f(x)$ tend vers $+\infty$ à droite de 2 et vers $-\infty$ à gauche de 2 : la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

3. 1,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, puis que (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : utilise la forme de la question 1 ; $\dfrac{9}{x-2}$ tend vers 0 à l'infini.

CORRIGÉ

En $+\infty$. D'après la question 1, $f(x) = x + 1 + \dfrac{9}{x-2}$. Le terme $x+1$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{9}{x-2}$ tend vers 0 : par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

En $-\infty$. $x+1$ tend vers $-\infty$ et $\dfrac{9}{x-2}$ tend vers 0 : par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Asymptote oblique. Pour tout $x \neq 2$:

$$f(x) - (x+1) = \frac{9}{x-2}.$$

Cette différence tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conclusion. Les deux limites sont établies, et (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. 0,75 pts

Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]2;+\infty[$ et au-dessous de (D) sur $]-\infty;2[$.

INDICE

Outil : la position se lit sur le signe de $f(x) - (x+1)$. **Début :** reprends la différence de la question 3.

CORRIGÉ

Signe de la différence. D'après la question 3, pour $x \neq 2$, $f(x) - (x+1) = \dfrac{9}{x-2}$. Comme $9 > 0$, cette différence a le signe de $x - 2$.

Sur $]2;+\infty[$. $x - 2 > 0$, donc $f(x) - (x+1) > 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D).

Sur $]-\infty;2[$. $x - 2 < 0$, donc $f(x) - (x+1) < 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D).

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]2;+\infty[$ et au-dessous de (D) sur $]-\infty;2[$.

5. 2 pts

Montrer que, pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f (on fera apparaître $f(-1)$ et $f(5)$).

INDICE

Outil : $\left(\dfrac{1}{x-2}\right)' = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$. **Début :** dérive la forme de la question 1. **Ensuite :** $(x-2)^2 - 9$ est une différence de deux carrés.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la question 1, f est la somme de $x \mapsto x+1$ et de $x \mapsto \dfrac{9}{x-2}$, dérivables sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$. Pour tout $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{9}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2)^2 - 9}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2-3)(x-2+3)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe du trinôme $(x-5)(x+1)$, positif à l'extérieur de $[-1;5]$ et négatif entre -1 et 5.

Valeurs.

$$f(-1) = \frac{1+1+7}{-3} = -3,$$
$$f(5) = \frac{25-5+7}{3} = 9.$$

Tableau.

x	$]-\infty;-1]$	$[-1;2[$	$]2;5]$	$[5;+\infty[$
signe de $f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
variations de f	croissante, jusqu'à -3	décroissante, vers $-\infty$	décroissante, de $+\infty$ à 9	croissante, vers $+\infty$

Conclusion. Pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$. La fonction f est croissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[5;+\infty[$, décroissante sur $[-1;2[$ et sur $]2;5]$, avec $f(-1) = -3$ et $f(5) = 9$.

6. 1 pts

Montrer que $f(x) \leq -3$ pour tout $x < 2$, et que $f(x) \geq 9$ pour tout $x > 2$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

INDICE

Outil : un maximum de f sur un intervalle est supérieur ou égal à toutes les valeurs de f sur cet intervalle. **Début :** relis le tableau de la question 5, de chaque côté de 2.

CORRIGÉ

Sur $]-\infty;2[$**.** D'après le tableau de la question 5, f croît jusqu'à $f(-1) = -3$ puis décroît : -3 est le maximum de f sur cet intervalle. Pour tout $x < 2$:

$$f(x) \leq -3 < 0.$$

Sur $]2;+\infty[$**.** f décroît jusqu'à $f(5) = 9$ puis croît : 9 est le minimum de f sur cet intervalle. Pour tout $x > 2$:

$$f(x) \geq 9 > 0.$$

Conclusion. $f(x) \leq -3$ pour tout $x < 2$ et $f(x) \geq 9$ pour tout $x > 2$. Donc $f(x)$ ne s'annule pas : $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

7. 1 pts

Montrer que la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = -8x + 37$. Tracer (D), (T), les asymptotes et $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : $y = f'(3)\,(x-3) + f(3)$. **Ensuite :** trace d'abord les droites, puis la courbe fidèle au tableau.

CORRIGÉ

Valeurs en 3.

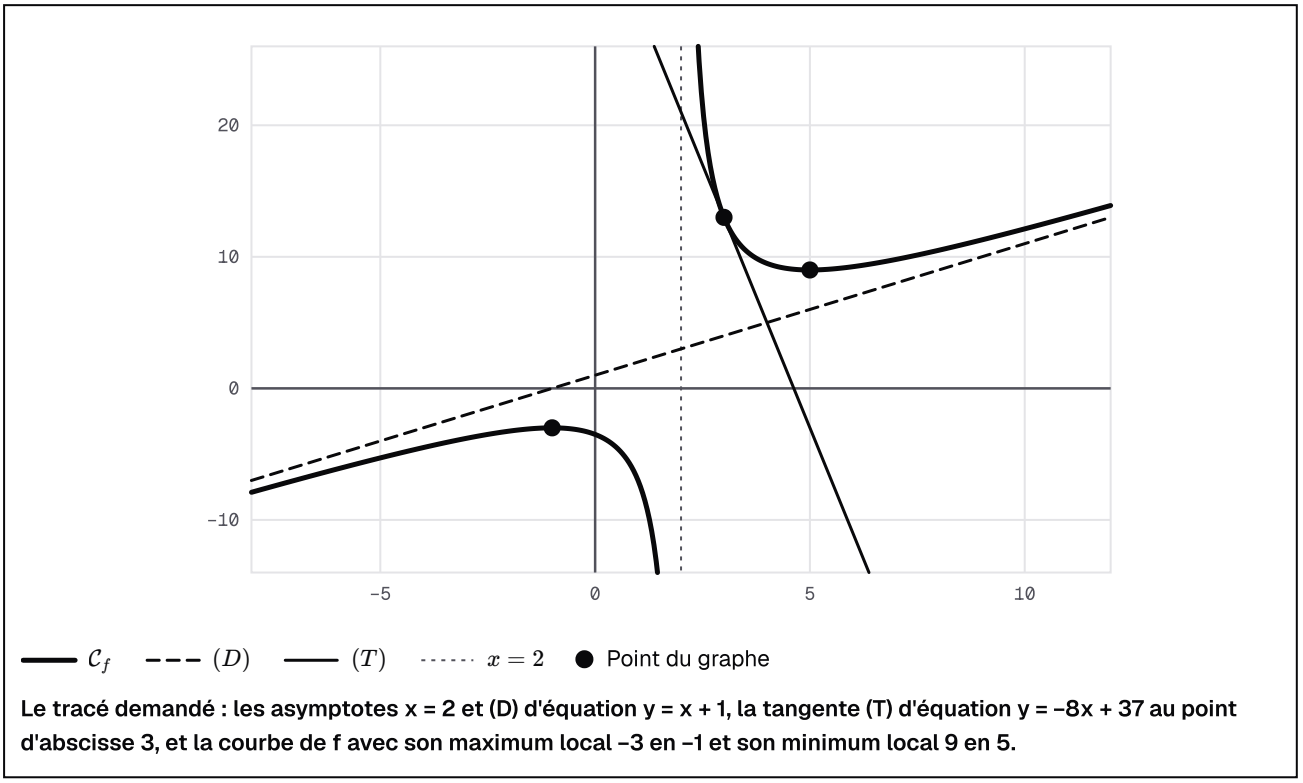
$$f(3) = \frac{9 - 3 + 7}{1} = 13,$$
$$f'(3) = \frac{(-2)\times 4}{1} = -8.$$

Tangente.

$$\begin{aligned} y &= -8(x-3) + 13 \\ &= -8x + 24 + 13 \\ &= -8x + 37. \end{aligned}$$

Tracé. On trace d'abord les asymptotes, d'équations $x = 2$ et $y = x + 1$, puis la tangente (T). On place le maximum local $(-1;-3)$ et le minimum local $(5;9)$. La courbe a deux branches : l'une au-dessous de (D), à gauche de 2 ; l'autre au-dessus de (D), à droite de 2.

Conclusion. La tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = -8x + 37$.



Le tracé demandé : les asymptotes x = 2 et (D) d'équation y = x + 1, la tangente (T) d'équation y = −8x + 37 au point d'abscisse 3, et la courbe de f avec son maximum local −3 en −1 et son minimum local 9 en 5.