BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Entraînement	7

Exercice 1

Deux expressions recollées en un point

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 4\sqrt{x}-2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

1.

Calculer $f(1)$ et la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 avec $x>1$. La fonction f est-elle continue en 1 ?

INDICE

Outil : à droite de 1, on utilise l'expression $4\sqrt{x}-2$; à gauche, l'expression x^2+1.

2.

Pour $h<0$ proche de 0, simplifier $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ et en déduire $f'_g(1)$.

INDICE

Début : pour $h<0$, $1+h\le 1$; utilise x^2+1.

3.

Pour $h>0$, montrer que :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{4}{\sqrt{1+h}+1},$$

puis en déduire $f'_d(1)$.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{1+h}+1$.

4.

La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Donner l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1.

INDICE

Outil : dérivable en 1 lorsque les nombres dérivés à droite et à gauche existent et sont égaux.

Exercice 2

La réciproque d'une somme avec racine carrée

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=3x+\sqrt{x}$.

1.

Calculer $f'(x)$ pour $x>0$. En déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

INDICE

Outil : la dérivée de $\sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x>0$.

2.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=[0;+\infty[$.

INDICE

Début : $3x$ et $\sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$. **Ensuite :** $f(0)=0$.

3.

Calculer $f(4)$, puis $\left(f^{-1}\right)'(14)$.

INDICE

Outil : si $f(a)=b$ et $f'(a)\neq 0$, alors $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$.

4.

Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 14.

INDICE

Point délicat : $f^{-1}(14)=4$, puisque $f(4)=14$.

Exercice 3

La quantité qui rend le bénéfice maximal

Une coopérative fictive produit q milliers de pots de miel, avec $0 \leq q \leq 15$. Chaque pot est vendu 120 dirhams. En milliers de dirhams, sa recette est donc $R(q) = 120q$ et son coût total est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 200$ (données fictives).

1.

Exprimer le bénéfice $B(q) = R(q) - C(q)$. Calculer $B'(q)$ et vérifier que $B'(q) = -3(q - 10)(q + 2)$.

INDICE

Point délicat : le signe moins s'applique à tous les termes de $C(q)$. **Ensuite :** dérive terme à terme, puis développe la forme proposée.

2.

Étudier le signe de $B'(q)$ sur $[0; 15]$ et dresser le tableau de variations de B.

INDICE

Outil : sur $[0; 15]$, $q + 2 > 0$.

3.

Quelle quantité la coopérative doit-elle produire pour un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

INDICE

Outil : lis le maximum dans le tableau, puis reviens aux unités de l'énoncé.

Exercice 4

Concavité et deux points d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$, et vérifier que $f''(x) = 12(x - 1)(x - 2)$.

INDICE

Début : dérive une première fois, puis dérive f'.

2.

Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : un trinôme de coefficient $12 > 0$ est négatif entre ses racines.

3.

Déterminer les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : un point d'inflexion là où f'' s'annule en changeant de signe.

Exercice 5

Les branches infinies d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Vérifier que, pour tout $x\neq 2$, $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x-2}$.

INDICE

Outil : réduis le membre de droite au dénominateur $x-2$.

2.

Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers 2 à droite et à gauche. Interpréter.

INDICE

Début : $x+3$ tend vers 5. **Point délicat :** le signe de $x-2$ de chaque côté.

3.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que la droite (D) : $y=x+3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers 0 à l'infini. **Ensuite :** pour la position, étudie le signe de $f(x)-(x+3)$.

Exercice 6

Étude guidée d'un produit avec racine carrée

Soit f la fonction définie sur $[-3;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x+3}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter.

INDICE

Outil : $\sqrt{x+3}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

2.

Pour $h>0$, simplifier $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$ et étudier sa limite quand h tend vers 0. Interpréter.

INDICE

Début : $f(-3)=0$ et $f(-3+h)=(-3+h)\sqrt{h}$. **Ensuite :** $\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

3.

Montrer que, pour $x>-3$, $f'(x)=\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$.

INDICE

Outil : dérivée d'un produit, avec $\left(\sqrt{x+3}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$. **Ensuite :** réduis au même dénominateur.

4.

Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.

INDICE

Outil : le dénominateur $2\sqrt{x+3}$ est strictement positif ; étudie le signe du numérateur.

Exercice 7

Variations de la racine carrée d'un trinôme

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$.

1.

Vérifier que $x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$. En déduire que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : développe $(x-2)^2$. **Point délicat :** la racine d'une fonction est dérivable là où cette fonction est strictement positive.

2.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$.

INDICE

Outil : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 13$.

3.

Étudier les variations de f. En déduire que $f(x) \geq 3$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif. **Ensuite :** un minimum se lit sur les variations.