BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Entraînement	7

Exercice 1

Deux expressions recollées en un point

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 4\sqrt{x}-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1.

Calculer $f(1)$ et la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 avec $x>1$. La fonction f est-elle continue en 1 ?

INDICE

Outil : à droite de 1, on utilise l'expression $4\sqrt{x}-2$; à gauche, l'expression x^2+1.

CORRIGÉ

Valeur en 1. Comme $0\le 1\le 1$, on utilise la première expression : $f(1)=1+1=2$.

Limite à droite. Pour $x>1$, $f(x)=4\sqrt{x}-2$. Quand x tend vers 1 avec $x>1$, $\sqrt{x}$ tend vers 1, donc $f(x)$ tend vers $4-2=2$.

Limite à gauche. Pour $0\le x\le 1$, $f(x)=x^2+1$, qui tend vers 2 quand x tend vers 1.

Conclusion. Les limites à droite et à gauche en 1 sont égales à $f(1)=2$: f est continue en 1.

2.

Pour $h<0$ proche de 0, simplifier $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ et en déduire $f'_g(1)$.

INDICE

Début : pour $h<0$, $1+h\le 1$; utilise x^2+1.

CORRIGÉ

Taux. Soit $h<0$ avec $1+h\ge 0$. Alors $1+h$ appartient à $[0;1]$, donc $f(1+h)=(1+h)^2+1$ et :

$$\begin{aligned} &\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &=\frac{(1+h)^2+1-2}{h} \\ &=\frac{2h+h^2}{h} \\ &=2+h. \end{aligned}$$

Limite. Quand h tend vers 0 avec $h<0$, $2+h$ tend vers 2.

Conclusion. f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1)=2$.

3.

Pour $h > 0$, montrer que :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{4}{\sqrt{1+h}+1},$$

puis en déduire $f'_d(1)$.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{1+h}+1$.

CORRIGÉ

Taux. Soit $h > 0$. Alors $1+h > 1$, donc $f(1+h) = 4\sqrt{1+h} - 2$. Avec $f(1) = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{4\sqrt{1+h}-4}{h} \\ &= \frac{4\left(\sqrt{1+h}-1\right)}{h}.\end{aligned}$$

Expression conjuguée. Multiplions le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{1+h}+1$, qui est strictement positif. Le numérateur devient :

$$\begin{aligned}&4\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right) \\ &= 4\left((1+h)-1\right) = 4h.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{4h}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1+h}+1}.\end{aligned}$$

Limite. Quand h tend vers 0, $\sqrt{1+h}+1$ tend vers 2 : par quotient, le taux tend vers $\frac{4}{2} = 2$.

Conclusion. Pour tout $h > 0$, le taux vaut $\frac{4}{\sqrt{1+h}+1}$; f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 2$.

4.

La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Donner l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1.

INDICE

Outil : dérivable en 1 lorsque les nombres dérivés à droite et à gauche existent et sont égaux.

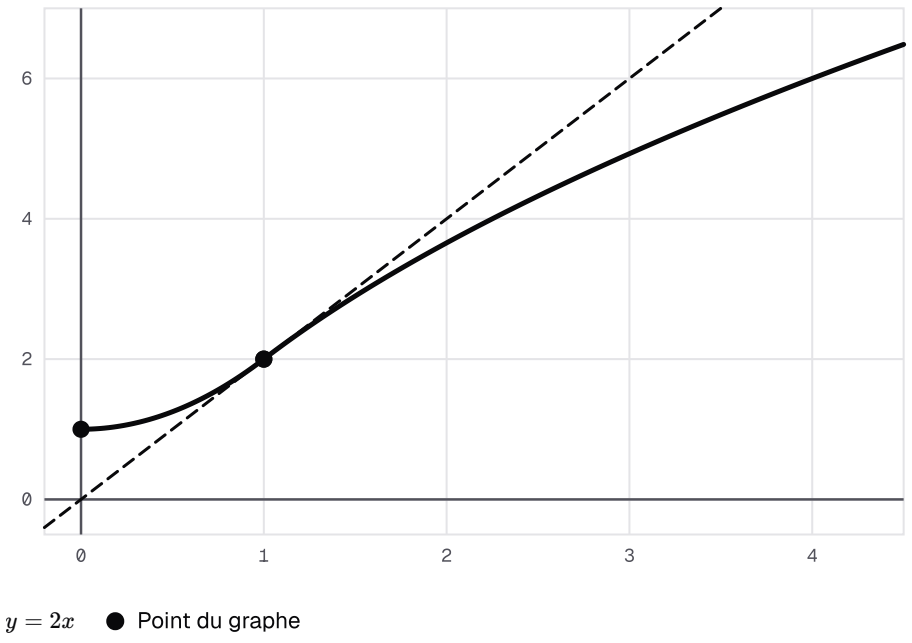
CORRIGÉ

Dérivabilité. $f'_g(1) = f'_d(1) = 2$: les deux nombres dérivés existent et sont égaux. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$. On retrouve la continuité en 1 : une fonction dérivable en un point y est continue.

Tangente. Au point d'abscisse 1, avec $f(1) = 2$ et $f'(1) = 2$:

$$\begin{aligned} y &= 2(x-1) + 2 \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable en 1, et la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2x$.



Les deux expressions se raccordent au point (1 ; 2) sans coude : la courbe de f y admet la tangente d'équation y = 2x.

Exercice 2

La réciproque d'une somme avec racine carrée

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=3x+\sqrt{x}$.

1.

Calculer $f'(x)$ pour $x>0$. En déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

INDICE

Outil : la dérivée de $\sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x>0$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc f aussi. Pour tout $x>0$:

$$f'(x)=3+\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Signe. Pour $x>0$, les deux termes 3 et $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sont strictement positifs. Donc $f'(x)>0$ sur $]0;+\infty[$.

Hypothèses. f est continue sur $[0;+\infty[$, comme somme de fonctions continues, et dérivable sur $]0;+\infty[$. La propriété du signe de la dérivée s'applique donc à tout l'intervalle $[0;+\infty[$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=[0;+\infty[$.

INDICE

Début : $3x$ et $\sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$. **Ensuite :** $f(0)=0$.

CORRIGÉ

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, $3x$ et $\sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$. Par somme :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Intervalle image. f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, avec $f(0)=0$ et une limite égale à $+\infty$ en $+\infty$. L'image de $[0;+\infty[$ par f est donc $[0;+\infty[$.

Conclusion. f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=[0;+\infty[$.

3.

Calculer $f(4)$, puis $\left(f^{-1}\right)'(14)$.

INDICE

Outil : si $f(a)=b$ et $f'(a)\neq 0$, alors $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$.

CORRIGÉ

Antécédent de 14. Comme $3\times 4=12$ et $\sqrt{4}=2$: $f(4)=12+2=14$.

Nombre dérivé en 4.

$$f'(4)=3+\frac{1}{2\sqrt{4}}=3+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{13}{4}\neq 0.$$

Dérivée de la réciproque. f est dérivable en 4, $f(4)=14$ et $f'(4)\neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable en 14 et :

$$\left(f^{-1}\right)'(14)=\frac{1}{f'(4)}=\frac{4}{13}.$$

Conclusion. $f(4)=14$ et $\left(f^{-1}\right)'(14)=\dfrac{4}{13}$.

4.

Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 14.

INDICE

Point délicat : $f^{-1}(14) = 4$, puisque $f(4) = 14$.

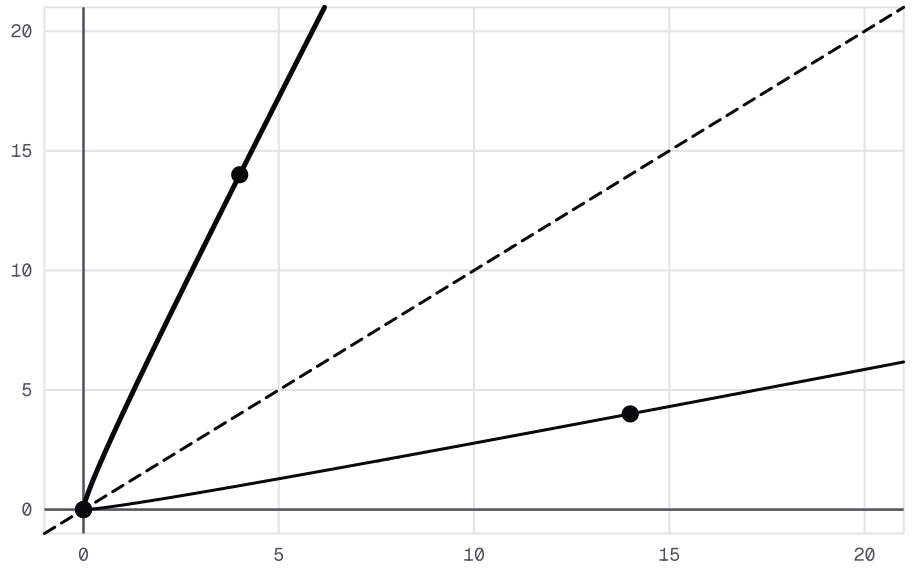
CORRIGÉ

Point de contact. $f(4) = 14$, donc $f^{-1}(14) = 4$: la tangente passe par le point $(14; 4)$.

Tangente. Avec $\left(f^{-1}\right)'(14) = \dfrac{4}{13}$ (question 3) :

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{13}(x - 14) + 4 \\ &= \frac{4}{13}x - \frac{56}{13} + \frac{52}{13} \\ &= \frac{4}{13}x - \frac{4}{13}. \end{aligned}$$

Conclusion. La tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 14 a pour équation $y = \dfrac{4}{13}x - \dfrac{4}{13}$.



La courbe de f : x ↦ 3x + √x, celle de f⁻¹ et la droite d'équation y = x. Au point A'(14 ; 4) de la courbe de f⁻¹, symétrique de A(4 ; 14), la tangente a pour coefficient directeur 4/13.

Exercice 3

La quantité qui rend le bénéfice maximal

Une coopérative fictive produit q milliers de pots de miel, avec $0 \leq q \leq 15$. Chaque pot est vendu 120 dirhams. En milliers de dirhams, sa recette est donc $R(q) = 120q$ et son coût total est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 200$ (données fictives).

1.

Exprimer le bénéfice $B(q) = R(q) - C(q)$. Calculer $B'(q)$ et vérifier que $B'(q) = -3(q - 10)(q + 2)$.

INDICE

Point délicat : le signe moins s'applique à tous les termes de $C(q)$. **Ensuite :** dérive terme à terme, puis développe la forme proposée.

CORRIGÉ

Bénéfice. Pour tout $q \in [0; 15]$, en retranchant chaque terme de $C(q)$:

$$\begin{aligned} &B(q) \\ &= 120q - q^3 + 12q^2 \\ &\quad - 60q - 200 \\ &= -q^3 + 12q^2 + 60q - 200. \end{aligned}$$

Dérivée. B est un polynôme, dérivable sur $[0; 15]$. Pour tout $q \in [0; 15]$:

$$B'(q) = -3q^2 + 24q + 60.$$

Forme factorisée. Développons la forme proposée :

$$\begin{aligned} &-3(q - 10)(q + 2) \\ &= -3\left(q^2 - 8q - 20\right) \\ &= -3q^2 + 24q + 60. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $q \in [0; 15]$, le bénéfice vaut $-q^3 + 12q^2 + 60q - 200$ et $B'(q) = -3(q - 10)(q + 2)$.

2.

Étudier le signe de $B'(q)$ sur $[0;15]$ et dresser le tableau de variations de B.

INDICE

Outil : sur $[0;15]$, $q+2>0$.

CORRIGÉ

Signe de $B'(q)$. Pour $q\in[0;15]$, $q+2>0$, donc $-3(q+2)<0$. Ainsi $B'(q)$ a le signe contraire de $q-10$:

- $B'(q)\geq 0$ sur $[0;10]$;
- $B'(q)\leq 0$ sur $[10;15]$.

Valeurs. $B(0)=-200$, $B(10)=600$ (calcul détaillé à la question 3) et :

$$\begin{aligned} B(15) &= -3\,375+2\,700\\ &\quad +900-200\\ &= 25. \end{aligned}$$

Tableau.

q	$[0;10]$	$[10;15]$
signe de $B'(q)$	$+$	$-$
variations de B	croissante, de -200 à 600	décroissante, de 600 à 25

Conclusion. B est croissante sur $[0;10]$ et décroissante sur $[10;15]$.

3.

Quelle quantité la coopérative doit-elle produire pour un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

INDICE

Outil : lis le maximum dans le tableau, puis reviens aux unités de l'énoncé.

CORRIGÉ

Maximum. D'après la question 2, B croît sur $[0;10]$ puis décroît sur $[10;15]$: son maximum est atteint pour $q=10$.

Valeur.

$$\begin{aligned} B(10) &= -1\,000+1\,200\\ &\quad +600-200\\ &= 600. \end{aligned}$$

Conclusion. La coopérative doit produire 10 milliers de pots, soit $10\,000$ pots de miel ; le bénéfice maximal vaut alors 600 milliers de dirhams, soit $600\,000$ dirhams.

Exercice 4

Concavité et deux points d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$, et vérifier que $f''(x) = 12(x-1)(x-2)$.

INDICE

Début : dérive une première fois, puis dérive f'.

CORRIGÉ

Dérivée première. f est un polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 18x^2 \\ &\quad + 24x - 3. \end{aligned}$$

Dérivée seconde. En dérivant f', pour tout réel x :

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24.$$

Factorisation.

$$\begin{aligned} &12(x-1)(x-2) \\ &= 12\left(x^2 - 3x + 2\right) \\ &= 12x^2 - 36x + 24. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f''(x) = 12(x-1)(x-2)$.

2.

Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : un trinôme de coefficient $12 > 0$ est négatif entre ses racines.

CORRIGÉ

Signe de $f''(x)$. $f''(x) = 12(x-1)(x-2)$ est un trinôme de racines 1 et 2, de coefficient $12 > 0$. Il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles :

- $f''(x) > 0$ sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]2 ; +\infty[$;
- $f''(x) < 0$ sur $]1 ; 2[$.

Concavité. Sur un intervalle ouvert où f'' est strictement positive, la courbe est convexe ; là où f'' est strictement négative, elle est concave.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]2 ; +\infty[$, et concave sur $]1 ; 2[$.

3.

Déterminer les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : un point d'inflexion là où f'' s'annule en changeant de signe.

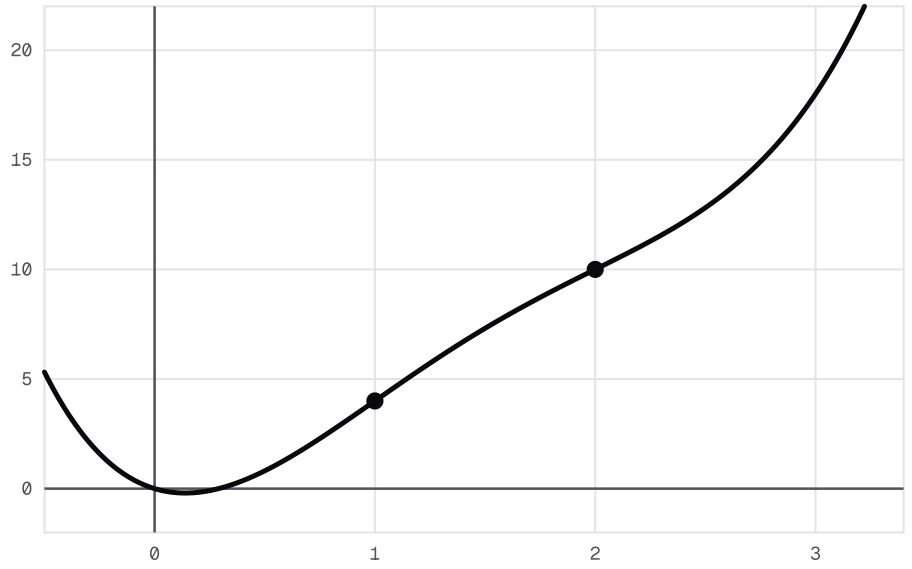
CORRIGÉ

Abscisses. D'après la question 2, f'' s'annule en changeant de signe en 1 et en 2.

Ordonnées.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 6 + 12 - 3 \\ &= 4, \\ f(2) &= 16 - 48 + 48 - 6 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Conclusion. Les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sont $(1;4)$ et $(2;10)$.



La courbe de f : x ↦ x⁴ − 6x³ + 12x² − 3x et ses deux points d'inflexion, (1 ; 4) et (2 ; 10) : convexe avant 1, concave entre 1 et 2, convexe après 2.

Exercice 5

Les branches infinies d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Vérifier que, pour tout $x\neq 2$, $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x-2}$.

INDICE

Outil : réduis le membre de droite au dénominateur $x-2$.

CORRIGÉ

Réduction au même dénominateur. Soit $x\neq 2$:

$$\begin{aligned} &x+3+\frac{1}{x-2}\\ &=\frac{(x+3)(x-2)+1}{x-2}\\ &=\frac{x^2+x-6+1}{x-2}\\ &=\frac{x^2+x-5}{x-2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x\neq 2$, $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x-2}$.

2.

Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers 2 à droite et à gauche. Interpréter.

INDICE

Début : $x+3$ tend vers 5. **Point délicat :** le signe de $x-2$ de chaque côté.

CORRIGÉ

À droite de 2. Quand x tend vers 2 avec $x>2$, $x-2$ tend vers 0 en restant strictement positif, donc $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers $+\infty$. Comme $x+3$ tend vers 5, par somme, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

À gauche de 2. Quand x tend vers 2 avec $x<2$, $x-2$ tend vers 0 en restant strictement négatif, donc $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers $-\infty$. Par somme, $f(x)$ tend vers $-\infty$.

Conclusion. $f(x)$ tend vers $+\infty$ à droite de 2 et vers $-\infty$ à gauche : la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

3.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que la droite (D) : $y = x + 3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers 0 à l'infini. **Ensuite :** pour la position, étudie le signe de $f(x) - (x+3)$.

CORRIGÉ

En $+\infty$. $x + 3$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers 0 : par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

En $-\infty$. $x + 3$ tend vers $-\infty$ et $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers 0 : par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Asymptote oblique. D'après la question 1, pour tout $x \neq 2$:

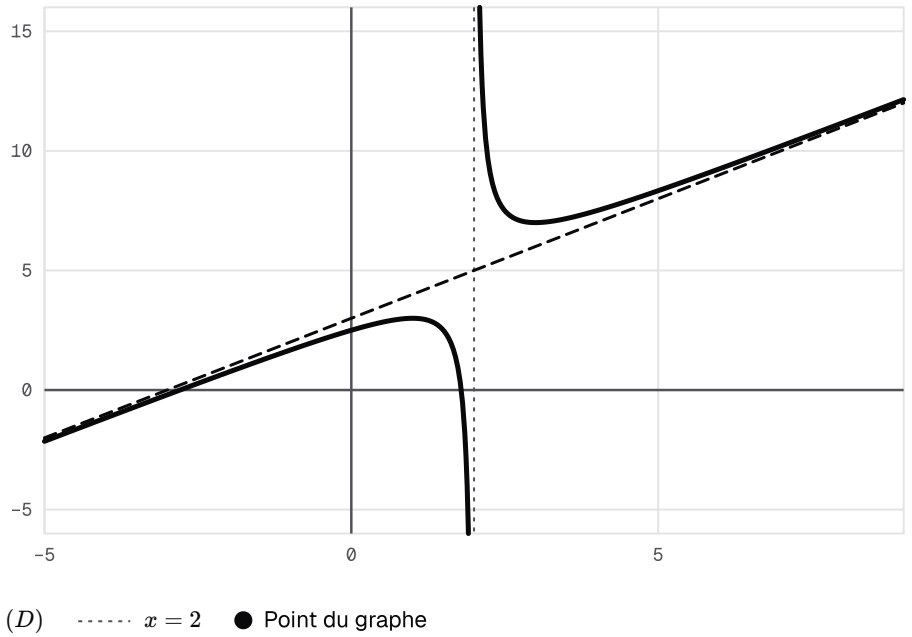
$$f(x) - (x+3) = \frac{1}{x-2}.$$

Cette différence tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Position. La différence a le signe de $x - 2$:

- sur $]2; +\infty[$, elle est strictement positive : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) ;
- sur $]-\infty; 2[$, elle est strictement négative : $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D).

Conclusion. (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$; la courbe est au-dessus de (D) sur $]2; +\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty; 2[$.



La courbe de f et ses asymptotes : la verticale d'équation x = 2 et l'oblique (D) d'équation y = x + 3. La courbe est au-dessus de (D) à droite de 2, au-dessous à gauche.

Exercice 6

Étude guidée d'un produit avec racine carrée

Soit f la fonction définie sur $[-3;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x+3}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter.

INDICE

Outil : $\sqrt{x+3}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ

Limite de f. Quand x tend vers $+\infty$, x et $\sqrt{x+3}$ tendent vers $+\infty$: par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Limite du quotient. Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\sqrt{x+3}$, qui tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Conclusion. Les deux limites valent $+\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2.

Pour $h > 0$, simplifier $\dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$ et étudier sa limite quand h tend vers 0. Interpréter.

INDICE

Début : $f(-3) = 0$ et $f(-3+h) = (-3+h)\sqrt{h}$. **Ensuite :** $\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

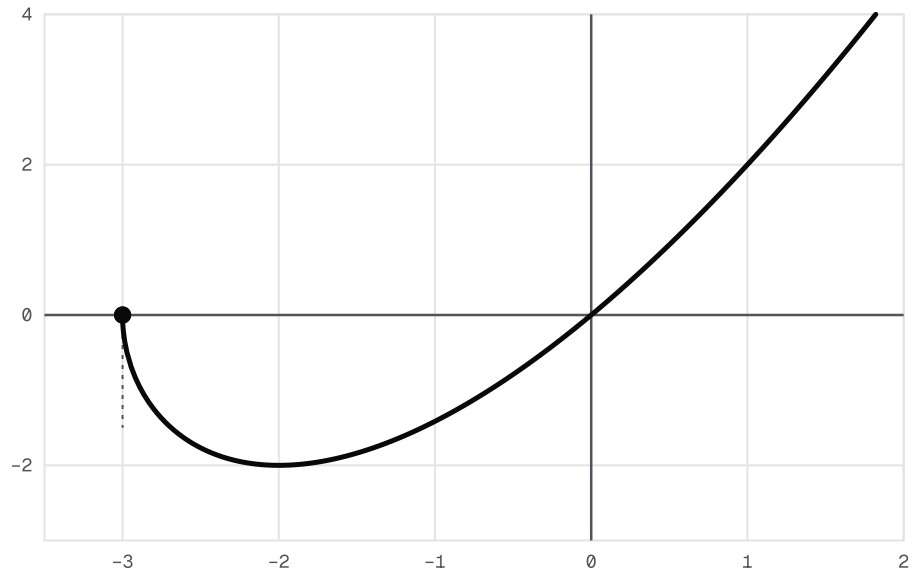
CORRIGÉ

Taux. $f(-3) = -3 \times \sqrt{0} = 0$. Soit $h > 0$: $f(-3+h) = (-3+h)\sqrt{h}$ et $\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, donc :

$$\begin{aligned} &\frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} \\ &= \frac{(-3+h)\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{-3+h}{\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

Limite. Quand h tend vers 0 avec $h > 0$, le numérateur tend vers -3 et $\sqrt{h}$ tend vers 0 en restant strictement positif : par quotient, le taux tend vers $-\infty$.

Conclusion. Le taux n'a pas de limite réelle : f n'est pas dérivable à droite en -3. Comme f est continue en -3 (produit de fonctions continues), $\mathcal{C}_f$ admet au point $(-3;0)$ une demi-tangente verticale.



Au point (–3 ; 0), la courbe de x ↦ x√(x + 3) part à la verticale : le taux de variation tend vers –∞, d'où une demi-tangente verticale.

3.

Montrer que, pour $x > -3$, $f'(x) = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$.

INDICE

Outil : dérivée d'un produit, avec $\left(\sqrt{x+3}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$. **Ensuite :** réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Pour $x > -3$, on a $x+3 > 0$: la fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$ est dérivable sur $]-3;+\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$. Le produit f est donc dérivable sur cet intervalle.

Dérivée d'un produit. Soit $x > -3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > -3$, $f'(x) = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$.

4.

Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.

INDICE

Outil : le dénominateur $2\sqrt{x+3}$ est strictement positif ; étudie le signe du numérateur.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour $x > -3$, $2\sqrt{x+3} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x+2$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]-3;-2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]-2;+\infty[$.

Hypothèses. f est continue sur $[-3;+\infty[$, comme produit de fonctions continues, et dérivable sur $]-3;+\infty[$. La propriété du signe de la dérivée s'applique donc sur $[-3;-2]$ et sur $[-2;+\infty[$, même si f n'est pas dérivable en -3.

Valeurs. $f(-3) = 0$ et $f(-2) = -2 \times 1 = -2$.

x	$[-3;-2]$	$[-2;+\infty[$
signe de $f'(x)$	$-$	$+$
variations de f	décroissante, de 0 à -2	croissante, de -2 à $+\infty$

Conclusion. f est décroissante sur $[-3;-2]$ et croissante sur $[-2;+\infty[$; son minimum sur $[-3;+\infty[$ est $f(-2) = -2$.

Exercice 7

Variations de la racine carrée d'un trinôme

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$.

1.

Vérifier que $x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$. En déduire que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : développe $(x-2)^2$. **Point délicat :** la racine d'une fonction est dérivable là où cette fonction est strictement positive.

CORRIGÉ

Forme canonique. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + 9 &= x^2 - 4x + 4 + 9 \\ &= x^2 - 4x + 13.\end{aligned}$$

Conséquence. Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geq 0$, donc $x^2 - 4x + 13 \geq 9 > 0$: l'expression sous la racine est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. f est définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme racine carrée d'un polynôme strictement positif.

2.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$.

INDICE

Outil : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 13$.

CORRIGÉ

Dérivée d'une racine. Posons $u(x) = x^2 - 4x + 13$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 2x - 4$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 13}} \\ &= \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$.

3.

Étudier les variations de f. En déduire que $f(x) \geq 3$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif. **Ensuite :** un minimum se lit sur les variations.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 2$.

Variations. $f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; 2]$: f y est décroissante. $f'(x) \geq 0$ sur $[2 ; +\infty[$: f y est croissante.

Minimum. f atteint donc en 2 son minimum sur $\mathbb{R}$: $f(2) = \sqrt{9} = 3$.

Conclusion. f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$; pour tout réel x, $f(x) \geq f(2)$, c'est-à-dire $f(x) \geq 3$.