BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Application	8

Exercice 1

Un nombre dérivé par le taux de variation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$.

1.

Calculer $f(-1)$, puis développer $f(-1+h)$ pour tout réel h.

INDICE

Outil : $(-1+h)^2 = 1 - 2h + h^2$.

2.

Pour $h \neq 0$, simplifier le taux de variation $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$. En déduire que f est dérivable en -1 et donner $f'(-1)$.

INDICE

Début : le numérateur vaut $3h + 2h^2$; mets h en facteur. **Ensuite :** fais tendre h vers 0.

3.

Contrôler ce résultat avec la fonction dérivée de f. Que représente $f'(-1)$ pour la courbe de f ?

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est $x \mapsto 2ax + b$.

Exercice 2

Équation d'une tangente

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5$, et $\mathcal{C}_g$ sa courbe.

1.

Calculer $g(2)$, $g'(x)$ et $g'(2)$.

INDICE

Outil : dérive terme à terme ; $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

2.

Écrire l'équation réduite de la tangente (T) à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.

INDICE

Outil : $y = g'(a)\,(x - a) + g(a)$ avec $a = 2$.

Exercice 3

Dériver un polynôme, un quotient et un produit

1.

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

INDICE

Outil : $(k\,u)' = k\,u'$ et $\left(x^n\right)' = n\,x^{n-1}$.

2.

Dériver la fonction g définie sur $]-4;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 4}$.

INDICE

Début : pose $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = x + 4$, qui ne s'annule pas sur $]-4;+\infty[$.

3.

Dériver la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \left(x^2 + 1\right)(2x - 3)$.

INDICE

Outil : $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$. **Point délicat :** ce n'est pas $u'\,v'$.

Exercice 4

Dériver une puissance et une racine d'une fonction affine

1.

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+5)^4$.

INDICE

Outil : $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ avec $u(x) = 2x+5$.

2.

On pose $g(x) = \sqrt{6-2x}$. Justifier que g est dérivable sur $]-\infty ; 3[$, puis calculer $g'(x)$.

INDICE

Début : cherche où $6-2x > 0$. **Outil :** $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exercice 5

Variations et extremums d'un polynôme de degré trois

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$. On admet que, pour tout réel x, $f'(x) = -3(x+1)(x-3)$.

1.

Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : un trinôme du second degré a le signe de son coefficient de x^2, ici -3, à l'extérieur de ses racines.

2.

En déduire les extremums locaux de f.

INDICE

Outil : un extremum local là où f' s'annule en changeant de signe.

Exercice 6

Deux asymptotes d'un quotient

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$.

1.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : pour $x>2$, mets x en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifie par x.

2.

Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 avec $x>2$, et interpréter graphiquement.

INDICE

Début : cherche séparément les limites du numérateur et du dénominateur. **Point délicat :** le signe de $x-2$ pour $x>2$.

Exercice 7

Une courbe au-dessous d'une droite

Soit f la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par $f(x)=x+1-\dfrac{2}{x+3}$, de courbe $\mathcal{C}_f$, et (D) la droite d'équation $y=x+1$.

1.

Calculer $f(x)-(x+1)$ pour tout x de $]-3;+\infty[$.

INDICE

Outil : les termes $x+1$ s'éliminent.

2.

Étudier le signe de cette différence et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Point délicat : sur $]-3;+\infty[$, quel est le signe de $x+3$?

3.

En déduire les solutions de l'inéquation $f(x)\leq x+1$ dans $]-3;+\infty[$.

INDICE

Outil : l'inéquation demande où $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D) ou la rencontre.

Exercice 8

Le coût d'une unité de plus

Un atelier fictif fabrique q chaises en bois par semaine, avec $0 \leq q \leq 500$. Son coût total, en dirhams, est $C(q) = 0{,}2q^2 + 80q + 1\,500$ (données fictives).

1.

Calculer le coût marginal $C'(q)$, puis $C'(200)$.

INDICE

Outil : dérive terme à terme ; $\left(q^2\right)' = 2q$.

2.

Estimer le coût de fabrication de la deux cent unième chaise. Comparer avec $C(201) - C(200)$.

INDICE

Outil : l'approximation affine avec $h = 1$: $C(201) \approx C(200) + C'(200)$.