BURHAN

Dérivation et étude de fonctions : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivation-etude-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivation et étude de fonctions	Application	8

Exercice 1

Un nombre dérivé par le taux de variation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$.

1.

Calculer $f(-1)$, puis développer $f(-1+h)$ pour tout réel h.

INDICE

Outil : $(-1+h)^2 = 1 - 2h + h^2$.

CORRIGÉ

Valeur en -1.

$$f(-1) = 2 - 7 - 1 = -6.$$

Développement. Soit h un réel. Avec $(-1+h)^2 = 1 - 2h + h^2$:

$$\begin{aligned} &f(-1+h) \\ &= 2\left(1 - 2h + h^2\right) \\ &\quad + 7(-1+h) - 1 \\ &= 2 - 4h + 2h^2 - 7 \\ &\quad + 7h - 1 \\ &= -6 + 3h + 2h^2. \end{aligned}$$

Conclusion. $f(-1) = -6$ et, pour tout réel h, $f(-1+h) = -6 + 3h + 2h^2$.

2.

Pour $h \neq 0$, simplifier le taux de variation $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$. En déduire que f est dérivable en -1 et donner $f'(-1)$.

INDICE

Début : le numérateur vaut $3h + 2h^2$; mets h en facteur. **Ensuite :** fais tendre h vers 0.

CORRIGÉ

Taux de variation. Soit h un réel non nul. D'après la question 1, le numérateur vaut $3h + 2h^2$, donc :

$$\begin{aligned} &\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\ &= \frac{3h + 2h^2}{h} \\ &= 3 + 2h. \end{aligned}$$

Limite. Quand h tend vers 0, $3 + 2h$ tend vers 3 : la limite du taux existe et c'est le réel 3.

Conclusion. D'après la définition du nombre dérivé, f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 3$.

3.

Contrôler ce résultat avec la fonction dérivée de f. Que représente $f'(-1)$ pour la courbe de f ?

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est $x \mapsto 2ax + b$.

CORRIGÉ

Contrôle. f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 4x + 7.$$

Donc $f'(-1) = -4 + 7 = 3$: on retrouve le résultat de la question 2.

Lecture graphique. Le nombre dérivé $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point $A(-1; -6)$.

Conclusion. Les deux calculs donnent $f'(-1) = 3$, la pente de la tangente à la courbe de f en $A(-1; -6)$.

Exercice 2

Équation d'une tangente

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5$, et $\mathcal{C}_g$ sa courbe.

1.

Calculer $g(2)$, $g'(x)$ et $g'(2)$.

INDICE

Outil : dérive terme à terme ; $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

CORRIGÉ

Image de 2. $g(2) = 8 - 8 + 5 = 5$.

Dérivée. g est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant terme à terme, pour tout réel x :

$$g'(x) = 3x^2 - 4x.$$

Nombre dérivé en 2. $g'(2) = 12 - 8 = 4$.

Conclusion. $g(2) = 5$; pour tout réel x, $g'(x) = 3x^2 - 4x$; enfin $g'(2) = 4$.

2.

Écrire l'équation réduite de la tangente (T) à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.

INDICE

Outil : $y = g'(a)\,(x-a) + g(a)$ avec $a = 2$.

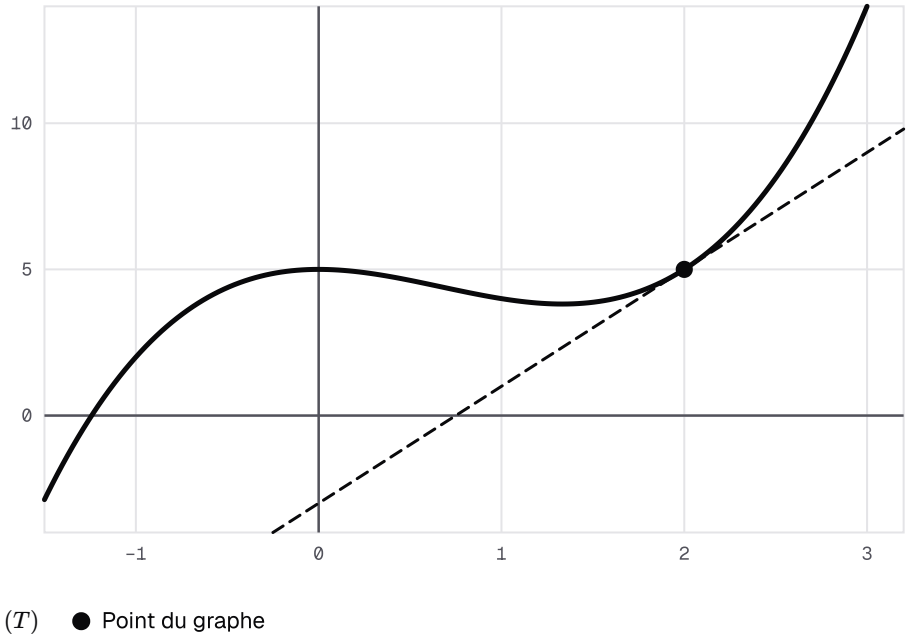
CORRIGÉ

Équation. La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = g'(2)\,(x-2) + g(2)$. Avec les valeurs de la question 1 :

$$\begin{aligned} y &= 4(x-2) + 5 \\ &= 4x - 3. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour $x = 2$, on trouve $y = 5 = g(2)$: le point $(2;5)$ est bien sur (T).

Conclusion. La tangente (T) à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2 a pour équation réduite $y = 4x - 3$.



La courbe de g : x ↦ x³ − 2x² + 5 et sa tangente (T) d'équation y = 4x − 3 au point d'abscisse 2.

Exercice 3

Dériver un polynôme, un quotient et un produit

1.

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

INDICE

Outil : $(k\,u)' = k\,u'$ et $(x^n)' = n\,x^{n-1}$.

CORRIGÉ

Dérivée. f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On dérive terme à terme : pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x \\ &\quad + 7 \\ &= 12x^2 - 10x + 7. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 12x^2 - 10x + 7$.

2.

Dériver la fonction g définie sur $]-4;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3x-2}{x+4}$.

INDICE

Début : pose $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = x + 4$, qui ne s'annule pas sur $]-4;+\infty[$.

CORRIGÉ

Formes. Pour $x \in]-4;+\infty[$, posons $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = x + 4$. Alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$. De plus $v(x) > 0$: v ne s'annule pas sur cet intervalle.

Dérivée d'un quotient. La fonction g est donc dérivable sur $]-4;+\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle, $g'(x)$ a pour dénominateur $(x+4)^2$ et pour numérateur $u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)$.

Numérateur.

$$\begin{aligned} &3(x+4) - (3x-2) \times 1 \\ &= 3x + 12 - 3x + 2 \\ &= 14. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in]-4;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{14}{(x+4)^2}.$$

3.

Dériver la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \left(x^2 + 1\right)(2x - 3)$.

INDICE

Outil : $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$. **Point délicat :** ce n'est pas $u'\,v'$.

CORRIGÉ

Formes. Pour tout réel x, posons $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = 2x - 3$. Alors $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$.

Dérivée d'un produit. La fonction $k = u\,v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la formule du produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2x(2x - 3) \\ &\quad + 2\left(x^2 + 1\right) \\ &= 4x^2 - 6x + 2x^2 + 2 \\ &= 6x^2 - 6x + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $k'(x) = 6x^2 - 6x + 2$.

Exercice 4

Dériver une puissance et une racine d'une fonction affine

1.

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+5)^4$.

INDICE

Outil : $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ avec $u(x) = 2x+5$.

CORRIGÉ

Fonction intérieure. Pour tout réel x, posons $u(x) = 2x+5$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2$.

Dérivée d'une puissance. $f = u^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times 2 \times (2x+5)^3 \\ &= 8\,(2x+5)^3. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 8\,(2x+5)^3$.

2.

On pose $g(x) = \sqrt{6-2x}$. Justifier que g est dérivable sur $]-\infty;3[$, puis calculer $g'(x)$.

INDICE

Début : cherche où $6-2x > 0$. **Outil :** $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

CORRIGÉ

Intervalle. Posons $u(x) = 6-2x$. On a $6-2x > 0 \Leftrightarrow x < 3$. Sur $]-\infty;3[$, la fonction u est donc dérivable et strictement positive.

Dérivabilité. La racine carrée d'une fonction dérivable et strictement positive est dérivable : g est dérivable sur $]-\infty;3[$.

Dérivée. $u'(x) = -2$, donc, pour tout $x < 3$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2}{2\sqrt{6-2x}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{6-2x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. g est dérivable sur $]-\infty;3[$ et, pour tout x de cet intervalle, $g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{6-2x}}$.

Exercice 5

Variations et extremums d'un polynôme de degré trois

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$. On admet que, pour tout réel x, $f'(x) = -3(x+1)(x-3)$.

1.

Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : un trinôme du second degré a le signe de son coefficient de x^2, ici -3, à l'extérieur de ses racines.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. $f'(x) = -3(x+1)(x-3)$ est un trinôme de racines -1 et 3, dont le coefficient de x^2 vaut $-3 < 0$. Il est donc négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles :

- $f'(x) < 0$ sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]3 ; +\infty[$;
- $f'(x) > 0$ sur $]-1 ; 3[$;
- $f'(-1) = f'(3) = 0$.

Tableau.

x	$]-\infty ; -1]$	$[-1 ; 3]$	$[3 ; +\infty[$
signe de $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
variations de f	décroissante	croissante	décroissante

Conclusion. D'après le signe de la dérivée :

- $f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; -1]$: f y est décroissante ;
- $f'(x) \geq 0$ sur $[-1 ; 3]$: f y est croissante ;
- $f'(x) \leq 0$ sur $[3 ; +\infty[$: f y est décroissante.

2.

En déduire les extremums locaux de f.

INDICE

Outil : un extremum local là où f' s'annule en changeant de signe.

CORRIGÉ

En -1. f' s'annule en -1 en passant du signe moins au signe plus. Donc f admet en -1 un minimum local :

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 + 3 - 9 - 4 \\ &= -9. \end{aligned}$$

En 3. f' s'annule en 3 en passant du signe plus au signe moins. Donc f admet en 3 un maximum local :

$$\begin{aligned} f(3) &= -27 + 27 + 27 - 4 \\ &= 23. \end{aligned}$$

Conclusion. f admet un minimum local égal à -9, atteint en -1, et un maximum local égal à 23, atteint en 3.

Exercice 6

Deux asymptotes d'un quotient

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$.

1.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : pour $x>2$, mets x en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifie par x.

CORRIGÉ

Mise en facteur. Soit $x>2$. Alors $x\neq 0$ et :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} \\ &= \frac{3+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}. \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{2}{x}$ tendent vers 0 : le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1. Par quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{3}{1}=3.$$

Conclusion. La limite de f en $+\infty$ vaut 3 : la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

2.

Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 avec $x>2$, et interpréter graphiquement.

INDICE

Début : cherche séparément les limites du numérateur et du dénominateur. **Point délicat :** le signe de $x-2$ pour $x>2$.

CORRIGÉ

Numérateur. Quand x tend vers 2, $3x+1$ tend vers 7.

Dénominateur. Quand x tend vers 2 avec $x>2$, $x-2$ tend vers 0 en restant strictement positif.

Limite. Le numérateur tend vers un réel strictement positif et le dénominateur vers 0 par valeurs positives : par quotient, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 2 avec $x>2$: la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Exercice 7

Une courbe au-dessous d'une droite

Soit f la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par $f(x)=x+1-\dfrac{2}{x+3}$, de courbe $\mathcal{C}_f$, et (D) la droite d'équation $y=x+1$.

1.

Calculer $f(x)-(x+1)$ pour tout x de $]-3;+\infty[$.

INDICE

Outil : les termes $x+1$ s'éliminent.

CORRIGÉ

Différence. Soit $x\in\,]-3;+\infty[$. Les termes $x+1$ s'éliminent :

$$\begin{aligned} &f(x)-(x+1)\\ &=x+1-\frac{2}{x+3}-(x+1)\\ &=-\frac{2}{x+3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x\in\,]-3;+\infty[$, $f(x)-(x+1)=-\dfrac{2}{x+3}$.

2.

Étudier le signe de cette différence et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

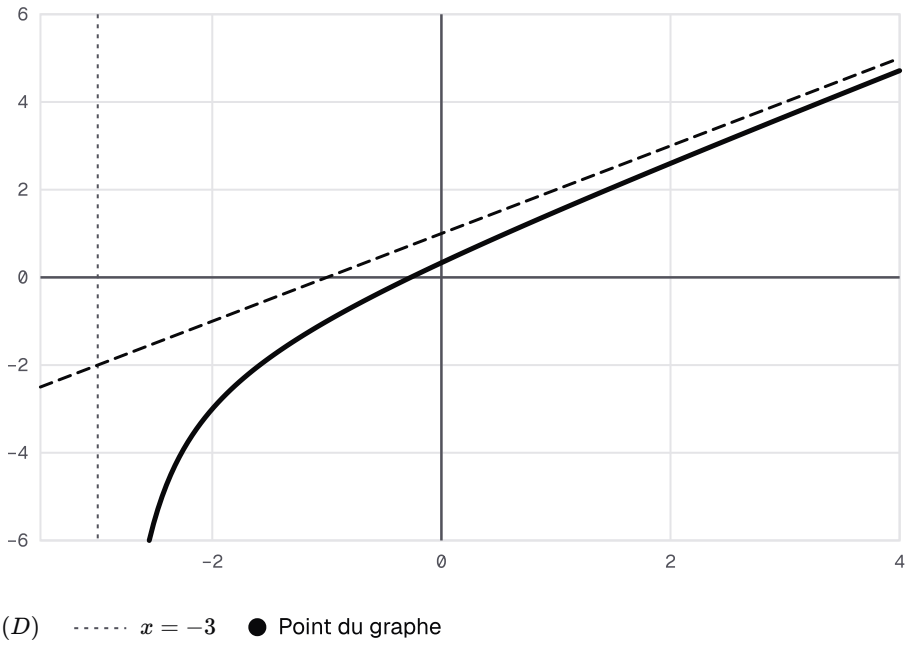
Point délicat : sur $]-3;+\infty[$, quel est le signe de $x+3$?

CORRIGÉ

Signe. Soit $x > -3$. Alors $x+3>0$, donc $\dfrac{2}{x+3} > 0$ et, d'après la question 1 :

$$f(x) - (x+1) < 0.$$

Conclusion. La différence est strictement négative sur tout l'intervalle $]-3;+\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de (D) sur cet intervalle, sans point commun avec elle.



Sur]−3 ; +∞[, la courbe de f reste strictement sous la droite (D) d'équation y = x + 1, et l'écart 2/(x + 3) diminue quand x grandit.

3.

En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq x+1$ dans $]-3;+\infty[$.

INDICE

Outil : l'inéquation demande où $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D) ou la rencontre.

CORRIGÉ

Lien avec la position. D'après la question 2, pour tout $x \in]-3;+\infty[$, on a $f(x) < x+1$, donc en particulier $f(x) \leq x+1$.

Conclusion. Tout réel de l'intervalle est solution : l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-3;+\infty[$.

Exercice 8

Le coût d'une unité de plus

Un atelier fictif fabrique q chaises en bois par semaine, avec $0 \leq q \leq 500$. Son coût total, en dirhams, est $C(q) = 0{,}2q^2 + 80q + 1\,500$ (données fictives).

1.

Calculer le coût marginal $C'(q)$, puis $C'(200)$.

INDICE

Outil : dérive terme à terme ; $\left(q^2\right)' = 2q$.

CORRIGÉ

Dérivée. C est un polynôme, dérivable sur $[0;500]$. Pour tout $q \in [0;500]$:

$$\begin{aligned} C'(q) &= 0{,}2 \times 2q + 80 \\ &= 0{,}4q + 80. \end{aligned}$$

Valeur en 200.

$$\begin{aligned} C'(200) &= 0{,}4 \times 200 + 80 \\ &= 160. \end{aligned}$$

Conclusion. Le coût marginal vérifie, pour tout $q \in [0;500]$, $C'(q) = 0{,}4q + 80$; en particulier $C'(200) = 160$.

2.

Estimer le coût de fabrication de la deux cent unième chaise. Comparer avec $C(201) - C(200)$.

INDICE

Outil : l'approximation affine avec $h = 1$: $C(201) \approx C(200) + C'(200)$.

CORRIGÉ

Estimation. Par l'approximation affine au voisinage de 200, avec un accroissement $h = 1$:

$$\begin{aligned} &C(201) - C(200) \\ &\approx C'(200) = 160. \end{aligned}$$

La deux cent unième chaise coûte donc environ 160 dirhams.

Calcul exact. D'une part :

$$\begin{aligned} C(200) &= 8\,000 + 16\,000 \\ &\quad + 1\,500 \\ &= 25\,500. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} C(201) &= 8\,080{,}2 \\ &\quad + 16\,080 + 1\,500 \\ &= 25\,660{,}2. \end{aligned}$$

La différence $C(201) - C(200)$ vaut $160{,}2$ dirhams.

Conclusion. Le coût de la deux cent unième chaise est estimé à 160 dirhams ; sa valeur exacte, $160{,}2$ dirhams, en est très proche.