BURHAN

Dérivation et étude de fonctions

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivation-etude-fonctions/cours

Chapitre	Semestre
Dérivation et étude de fonctions	Semestre 1

Entrée : le coût d'une unité de plus

Une entreprise fictive fabrique des lampes de bureau. Pour q lampes produites dans la journée, son coût total, en dirhams, vaut (données fictives) :

$$C(q) = q^2 + 10q + 200.$$

Ce matin, l'atelier a prévu 20 lampes. Un client en demande une de plus. Combien cette lampe supplémentaire coûte-t-elle à l'entreprise ?

Devine : Le coût d'une lampe de plus

Le coût de la lampe supplémentaire est l'écart $C(21) - C(20)$. Combien vaut-il ?

A. 40 dirhams.

Faux.

C'est le coût moyen $\dfrac{C(20)}{20} = \dfrac{800}{20}$: il répartit aussi les 200 dirhams fixes.

B. 10 dirhams.

Faux.

Le coefficient de q ne suffit pas : le terme q^2 augmente aussi.

C. 51 dirhams.

Juste.

Juste : $C(21) - C(20) = 851 - 800 = 51$.

D. 851 dirhams.

Faux.

C'est le coût total des 21 lampes, pas celui de la dernière.

Correction

On calcule $C(20) = 400 + 200 + 200 = 800$ et $C(21) = 441 + 210 + 200 = 851$.

La lampe supplémentaire coûte donc $851 - 800 = 51$ dirhams.

Retiens aussi le nombre 50 : tu le retrouveras dans ce chapitre, comme une très bonne approximation de ce coût.

Ce coût d'une unité de plus est au cœur du chapitre. Tu vas apprendre à le prévoir avec le **nombre dérivé**, puis avec la **fonction dérivée**.

Tu en déduiras les variations d'une fonction et ses extremums : un coût moyen minimal, un bénéfice maximal. Tu finiras par l'étude complète d'une fonction et le tracé de sa courbe.

Nombre dérivé

Du coût d'une unité au nombre dérivé

Reprends le coût $C(q) = q^2 + 10q + 200$. Quand la production passe de 20 à $20 + h$ lampes, le coût augmente de $C(20 + h) - C(20) = h^2 + 50h$.

Rapporté au nombre h de lampes ajoutées, cet écart donne le **taux de variation** de C entre 20 et $20 + h$. Pour $h \neq 0$:

$$\frac{C(20 + h) - C(20)}{h} = \frac{h^2 + 50h}{h}.$$

Devine : Un taux qui se stabilise

Pour $h = 1$, ce taux vaut 51. Pour $h = 0{,}1$, il vaut $50{,}1$. Pour $h = 0{,}01$, il vaut $50{,}01$. Vers quel nombre tend-il quand h tend vers 0 ?

A. Vers 0.

Faux.

C'est h qui tend vers 0 ; le taux, lui, vaut $h + 50$.

B. Vers 51.

Faux.

C'est la valeur du taux pour $h = 1$ seulement.

C. Vers 50.

Juste.

Juste : $h + 50$ tend vers 50.

D. Vers aucun nombre.

Faux.

Après simplification, on ne divise plus par h : la limite existe.

Correction

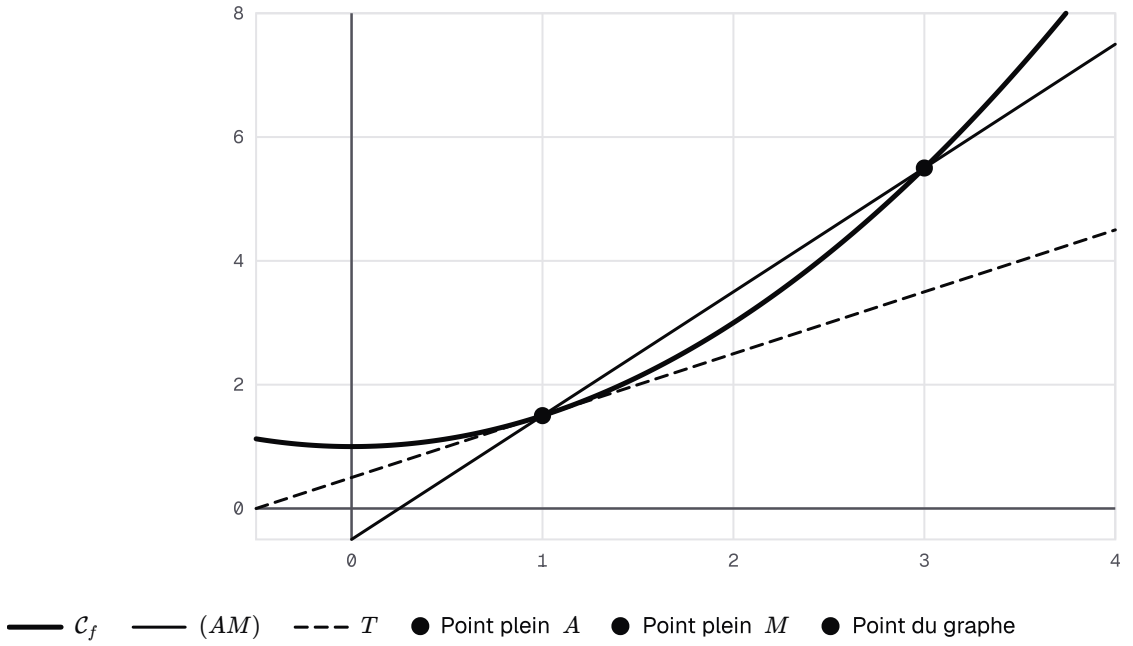
Pour $h \neq 0$, on simplifie par h : $\frac{h^2 + 50h}{h} = h + 50$.

D'après la limite d'une somme, $h + 50$ tend vers 50 quand h tend vers 0.

Ce nombre 50 est le **nombre dérivé** de C en 20. Il est très proche du coût réel de la 21e lampe, 51 dirhams.

En clair. Sur la courbe d'une fonction f, le taux $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la droite qui passe par les points d'abscisses a et x.

Quand x se rapproche de a, cette droite tourne autour du premier point. Si son coefficient directeur a une limite finie, cette limite décrit la pente de la courbe au point d'abscisse a.



Sur la courbe de x ↦ x²/2 + 1, la droite (AM) passe par A, d'abscisse 1, et par M, d'abscisse 3. Quand M glisse vers A, cette droite tourne autour de A et se rapproche de la tangente T.

La définition

Définition : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux de variation

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite **finie** quand x tend vers a, avec $x \neq a$. Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$.

En posant $x = a+h$, on a aussi $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

En clair. Le nombre dérivé $f'(a)$ est un **nombre** : la limite du taux de variation. Pour le coût de l'entrée, $C'(20) = 50$. Pour le calculer, on simplifie d'abord le taux par h, puis on cherche sa limite.

Exemple : un nombre dérivé par le taux de variation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x$, et $a = 2$. On a $f(2) = 12 - 10 = 2$.

Taux de variation. Pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(2+h) &= 3(4 + 4h + h^2) \\ &\quad - 10 - 5h \\ &= 2 + 7h + 3h^2. \end{aligned}$$

Donc $f(2+h) - f(2) = 7h + 3h^2$, et le taux vaut $\dfrac{7h + 3h^2}{h} = 7 + 3h$.

Limite. D'après la limite d'une somme, $7 + 3h$ tend vers 7 quand h tend vers 0.

Conclusion. La limite est finie : f est dérivable en 2 et $f'(2) = 7$.

Vérifie : Lire un nombre dérivé

Une fonction g vérifie, pour tout réel h non nul proche de 0 : $\dfrac{g(1+h) - g(1)}{h} = 4 - h$. Que peux-tu affirmer ?

A. $g'(1) = 4 - h$

Faux.

Le nombre dérivé est une limite : il ne dépend pas de h.

B. $g'(1) = 3$

Faux.

C'est la valeur du taux pour $h = 1$, pas sa limite.

C. g n'est pas dérivable en 1

Faux.

Le taux a une limite finie : g est dérivable en 1.

D. $g'(1) = 4$

Juste.

Juste : $4 - h$ tend vers 4.

Correction

D'après la limite d'une somme, $4 - h$ tend vers 4 quand h tend vers 0. Cette limite est finie : g est dérivable en 1 et $g'(1) = 4$.

Méthode et pratique

Méthode : calculer un nombre dérivé

1. **Écrire le taux** $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, pour $h \neq 0$.
2. **Transformer le numérateur** : développer et réduire, réduire au même dénominateur, ou multiplier par la quantité conjuguée en présence d'une racine carrée. Le but est de simplifier par h.

3. **Chercher la limite** quand h tend vers 0. Une limite finie donne $f'(a)$. Sinon, f n'est pas dérivable en a.

Exemple : avec une racine carrée

Soit g la fonction définie sur $[-3;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x+3}$, et $a=1$. On a $g(1)=2$.

Pour $h\neq 0$ et $h>-4$, le taux vaut $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$.

- On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{4+h}+2$. Le numérateur devient $(4+h)-4=h$.
- Le taux vaut donc $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$.
- Quand h tend vers 0, $\sqrt{4+h}$ tend vers 2. D'après la limite d'un quotient, le taux tend vers $\dfrac{1}{4}$.

Ainsi, g est dérivable en 1 et $g'(1)=\dfrac{1}{4}$.

Attention : remplacer h par 0 trop tôt

✗ « Pour $h=0$, le taux $\dfrac{7h+3h^2}{h}$ donne $\dfrac{0}{0}$: la fonction n'est pas dérivable. »

✓ L'écriture $\dfrac{0}{0}$ ne permet pas de conclure : on l'appelle une **forme indéterminée**. Un taux de variation donne cette forme chaque fois qu'on remplace h par 0 trop tôt.

On simplifie d'abord par h, qui est non nul : le taux vaut $7+3h$. Sa limite est 7.

À toi : Un nombre dérivé à calculer

Soit $k(x)=\dfrac{6}{x}$ sur $]0;+\infty[$. Calcule $k'(2)$ à l'aide du taux de variation. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $\dfrac{k(2+h)-k(2)}{h}$, avec $k(2)=3$.
Indice 2
Réduis $\dfrac{6}{2+h}-3$ au même dénominateur $2+h$.
Indice 3
Point délicat : simplifie par h avant de chercher la limite, et surveille le signe du numérateur.

Réponse
On a $k(2)=3$. Pour $h\neq 0$ et $h>-2$:

$$\begin{aligned} & k(2+h)-k(2) \\ &= \frac{6}{2+h}-3 \\ &= \frac{6-6-3h}{2+h} \\ &= \frac{-3h}{2+h}. \end{aligned}$$

Le taux vaut donc $\frac{-3}{2+h}$. D'après la limite d'un quotient, il tend vers $-\frac{3}{2}$ quand h tend vers 0.

Ainsi, k est dérivable en 2 et $k'(2)=-\frac{3}{2}$.

Remarque : Coin examen : rédiger un nombre dérivé

À l'examen, on rédige chaque étape et on nomme la limite employée. Par exemple, pour la fonction cube en 1 :

« Pour tout réel h non nul :

$$\begin{aligned} \frac{(1+h)^3-1}{h} &= \frac{3h+3h^2+h^3}{h} \\ &= 3+3h+h^2. \end{aligned}$$

D'après la limite d'une somme, $\lim\limits_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3$. Cette limite est finie : la fonction cube est dérivable en 1, et son nombre dérivé en 1 vaut 3. »

Tangente et approximation affine

La tangente en un point

Devine : La droite qui épouse la courbe

La courbe de $f : x \mapsto 3x^2-5x$ passe par le point $A(2;2)$, et $f'(2)=7$. Parmi les droites qui passent par A, laquelle épouse le mieux la courbe près de A ?

A. La droite de coefficient directeur 7.

Juste.

Juste : son coefficient directeur est la limite des pentes des droites (AM), avec M sur la courbe.

B. La droite de coefficient directeur 2.

Faux.

2 est l'ordonnée de A, pas une pente.

C. La droite horizontale.

Faux.

Une tangente horizontale demande $f'(2)=0$; ici $f'(2)=7$.

D. La droite qui passe aussi par l'origine.

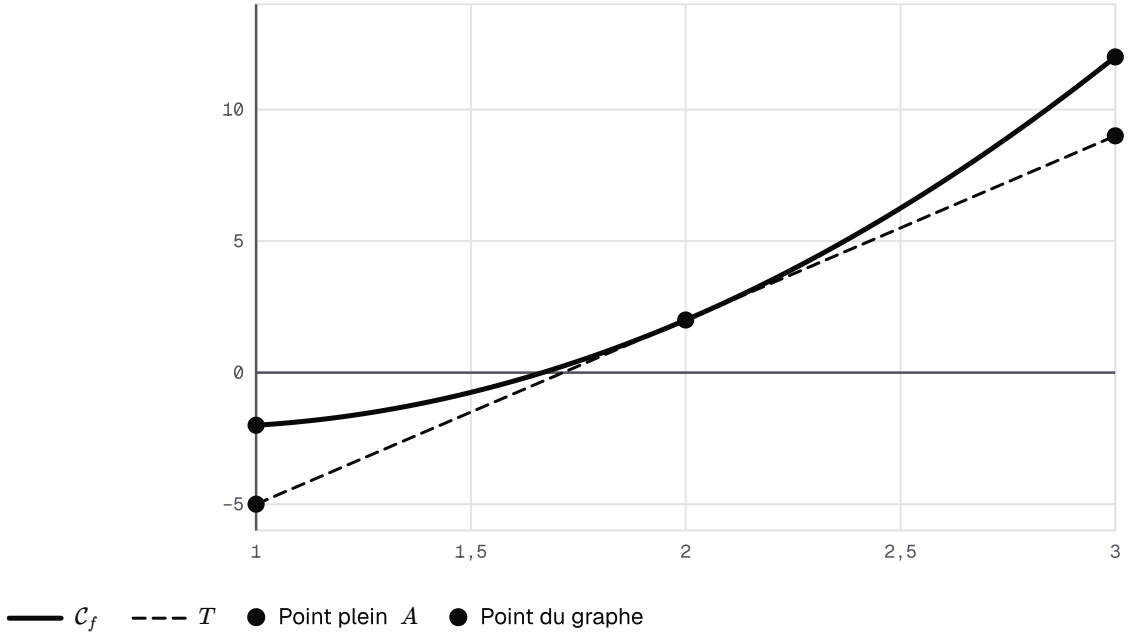
Faux.

La droite (OA) coupe la courbe en un second point quelconque : elle ne tient pas compte de la forme de la courbe près de A.

Correction

Les droites (AM), qui coupent la courbe en A et en un second point M, ont pour coefficient directeur le taux de variation de f entre 2 et l'abscisse de M.

Quand M se rapproche de A, ce taux tend vers $f'(2) = 7$. La droite limite, de coefficient directeur 7, est la **tangente** en A. La figure suivante la montre.



Courbe de f et sa tangente au point A

Définition : Tangente à une courbe

Soit f une fonction dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère. La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$. Elle a pour équation

$$y = f'(a)\,(x - a) + f(a).$$

Si $f'(a) = 0$, la tangente est **horizontale**.

Exemple : l'équation de la tangente

Pour $f : x \mapsto 3x^2 - 5x$ en $a = 2$: $f(2) = 2$ et $f'(2) = 7$. La tangente en A a pour équation $y = 7(x - 2) + 2$, c'est-à-dire $y = 7x - 12$.

Contrôle : pour $x = 2$, $7 \times 2 - 12 = 2$. Le point $A(2; 2)$ est bien sur la droite.

Approcher par la tangente

En clair. Près de A, la courbe et sa tangente se confondent presque. Or calculer sur une droite est bien plus simple que sur une courbe.

Pour $x = 2{,}1$, la courbe donne $f(2{,}1) = 2{,}73$ et la tangente donne $7 \times 2{,}1 - 12 = 2{,}7$. L'écart n'est que de $0{,}03$.

Définition : Approximation affine

Soit f une fonction dérivable en a. Pour h proche de 0, le réel $f(a) + f'(a)\,h$ est appelé **approximation affine** de $f(a + h)$; on écrit

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\,h.$$

Graphiquement, on remplace, près du point d'abscisse a, la courbe par sa tangente en ce point.

Exemple : le coût d'une lampe de plus

Pour le coût $C(q) = q^2 + 10q + 200$, on a trouvé $C(20) = 800$ et $C'(20) = 50$. L'approximation affine avec $h = 1$ donne :

$$\begin{aligned} C(21) &\approx C(20) + C'(20) \times 1 \\ &= 800 + 50 = 850. \end{aligned}$$

Le vrai coût total est $C(21) = 851$. Le nombre dérivé $C'(20) = 50$ estime donc le coût de la 21e lampe, qui vaut 51 dirhams.

En économie, on appelle ce nombre le **coût marginal** : c'est une approximation du coût d'une unité de plus.

Méthode et pratique

Méthode : tangente et approximation affine

1. **Calculer** $f(a)$ et $f'(a)$.
2. **Écrire** $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, puis développer et réduire sous la forme $y = mx + p$.
3. **Estimer** $f(a + h)$, pour h proche de 0, par $f(a) + f'(a)\,h$. Pour un coût, $f'(a)$ estime la variation quand la quantité passe de a à $a + 1$.

4. **Contrôler** que le point $A(a;f(a))$ vérifie l'équation trouvée.

À toi : Estimer une racine carrée

Pour $g : x \mapsto \sqrt{x+3}$, on a trouvé $g(1)=2$ et $g'(1)=\dfrac{1}{4}$. Écris l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1. Déduis-en une valeur approchée de $\sqrt{4{,}2}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique $y = g'(1)(x-1)+g(1)$.
Indice 2
Remarque que $\sqrt{4{,}2} = g(1{,}2)$.
Indice 3
Point délicat : h est l'écart à 1, soit $0{,}2$, et non $1{,}2$.

Réponse
La tangente a pour équation $y=\dfrac{1}{4}(x-1)+2$, c'est-à-dire $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}$.
Avec $h=0{,}2$, l'approximation affine donne $\sqrt{4{,}2}=g(1{,}2)\approx 2+\dfrac{1}{4}\times 0{,}2 = 2{,}05$.
La calculatrice affiche $2{,}0494$ en arrondissant au dix-millième : l'estimation est très proche.

Attention : la pente et l'ordonnée échangées

✗ « La tangente en $A(2;2)$ a pour équation $y=2(x-2)+7$, soit $y=2x+3$. »

✓ Le coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(2)=7$; $f(2)=2$ est l'ordonnée du point. L'équation juste est $y=7x-12$.

Le contrôle démasque l'erreur : pour $x=2$, la droite fausse donne 7, et non 2.

Dérivabilité à droite, à gauche ; dérivabilité et continuité

Un côté, puis l'autre

Devine : Avant et après 10 heures

Un atelier fictif loue une machine. Au-delà de 10 heures dans le mois, un tarif majoré s'applique. Pour q heures d'utilisation, le coût, en centaines de dirhams, vaut :

$$L(q)=\begin{cases} 3q+20 & \text{si } 0\le q\le 10 \\ 5q & \text{si } q>10 \end{cases}$$

De combien le coût augmente-t-il par heure juste avant 10 heures, puis juste après ?

A. De 5, puis de 3.

Faux.
Les deux tarifs sont inversés : relis chaque expression.

B. De 3, puis de 5.
Juste.
Juste : les taux à gauche et à droite de 10 valent 3 et 5.

C. De 3 des deux côtés.
Faux.
Le coût est continu en 10, mais les deux expressions n'ont pas le même coefficient.

D. On ne peut rien dire en 10.
Faux.
Chaque côté a sa propre expression : on calcule les deux taux séparément.

Correction
On a $L(10) = 50$.

Juste avant 10 heures. Pour $h < 0$ proche de 0, $L(10+h) = 3(10+h) + 20 = 50 + 3h$, et le taux vaut $\dfrac{3h}{h} = 3$.

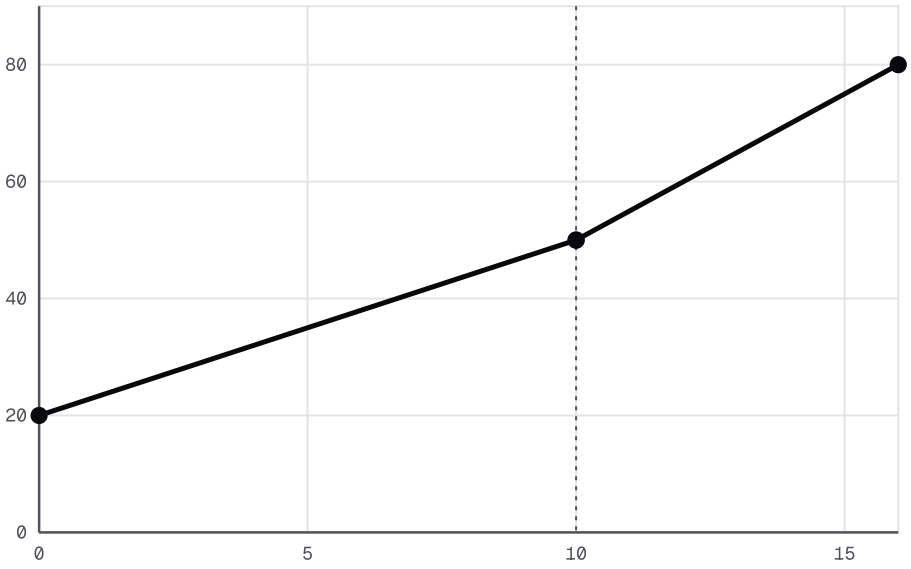
Juste après. Pour $h > 0$, $L(10+h) = 50 + 5h$, et le taux vaut $\dfrac{5h}{h} = 5$.

Le coût augmente de 3 centaines de dirhams par heure juste avant 10 heures, de 5 juste après.

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche ; demi-tangentes

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; a+\alpha[$, avec $\alpha > 0$. On dit que f est **dérivable à droite** en a lorsque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a avec $x > a$. Cette limite est le **nombre dérivé à droite** de f en a, noté $f'_d(a)$. On définit de même, sur $]a-\alpha; a]$, la **dérivabilité à gauche** et le nombre $f'_g(a)$.

La courbe de f admet alors au point $A(a; f(a))$ une **demi-tangente** à droite de coefficient directeur $f'_d(a)$ (à gauche : $f'_g(a)$). Si f est continue en a et si le taux de variation tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ d'un côté, la courbe admet en A, de ce côté, une **demi-tangente verticale**.



Le coût de location et son point anguleux

Point anguleux

Propriété : Dérivabilité et nombres dérivés à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a, avec $f'_d(a) = f'_g(a)$. On a alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Si f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, le point $A(a; f(a))$ est un **point anguleux** de la courbe : les deux demi-tangentes n'ont pas la même direction.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Exemple : un raccord lisse, un raccord anguleux

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$m(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a $m(1) = 1$.

- **À gauche**, pour $h < 0$, le taux vaut $\dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h$: il tend vers 2.

- **À droite**, pour $h > 0$, il vaut $\dfrac{2(1+h)-1-1}{h} = 2$.

Ainsi $m'_g(1) = m'_d(1) = 2$: m est dérivable en 1 et $m'(1) = 2$.

Pour le coût de location, $L'_g(10) = 3$ et $L'_d(10) = 5$: le point $B(10;50)$ est un point anguleux.

Méthode : dérivabilité à droite et à gauche

1. **Repérer** le point a où l'expression change : raccord de deux formules, ou racine carrée qui s'annule.
2. **Calculer** séparément la limite du taux à droite et à gauche de a, chacune avec la formule valable de ce côté.
3. **Conclure** : deux limites finies et égales, f est dérivable en a ; finies et différentes, point anguleux. Si f est continue en a et si la limite est infinie d'un côté, demi-tangente verticale de ce côté.
4. **Interpréter** sur la courbe : tracer les demi-tangentes avec leurs coefficients directeurs.

Attention : dérivable des deux côtés ne suffit pas

✗ « L est dérivable à droite et à gauche en 10, donc L est dérivable en 10. »

✓ Il faut aussi que les deux nombres dérivés soient égaux. Ici $L'_g(10) = 3$ et $L'_d(10) = 5$: ils diffèrent. Le nombre $L'(10)$ n'existe pas, et la courbe forme un angle en B.

Pour l'atelier, l'heure de plus ne coûte pas la même chose avant et après 10 heures.

Dérivable, donc continue

Pourquoi est-ce vrai ? Un cas chiffré d'abord : pour $x \mapsto x^2$ en $a = 1$, l'écart s'écrit $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Quand x tend vers 1, le premier facteur tend vers 0, le second vers 2 : l'écart tend vers 0.

En général, $f(x) - f(a)$ est le produit du taux de variation par $x - a$. La preuve, sous l'énoncé, se lit pour comprendre.

Théorème : Dérivabilité et continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en a sans y être dérivable.

Démonstration

Étape 1. Pour tout réel x de I différent de a, on écrit

$$f(x) = f(a) + (x - a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Étape 2. Quand x tend vers a, le facteur $x - a$ tend vers 0 et, par hypothèse, le taux de variation tend vers le réel $f'(a)$. D'après les opérations sur les limites (limite d'un produit), le produit tend vers $0 \times f'(a) = 0$.

Étape 3. D'après les opérations sur les limites (limite d'une somme), $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a : c'est la définition de la continuité de f en a.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée réutilisable : **écrire $f(x) - f(a)$ comme un produit**, $(x - a)$ fois le taux de variation. Le premier facteur tend vers 0, le second vers le réel $f'(a)$. D'après la limite d'un produit, l'écart tend vers 0. La limite d'une somme donne alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Vérifie : L'argument clé de la preuve

Dans la preuve, pourquoi le produit $(x - a) \times \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend-il vers 0 quand x tend vers a ?

A. Parce que le taux de variation tend vers 0.

Faux.

Le taux tend vers $f'(a)$, qui n'est pas nul en général.

B. Parce que f est continue en a.

Faux.

C'est la conclusion de la preuve : on ne peut pas s'en servir.

C. Parce qu'un facteur tend vers 0 et l'autre vers un réel.

Juste.

Juste : c'est la limite d'un produit, $0 \times f'(a) = 0$.

D. Parce que le produit vaut 0 pour tout x.

Faux.

Pour $x \neq a$, le produit vaut $f(x) - f(a)$, qui n'est pas nul en général.

Correction

Le facteur $x - a$ tend vers 0. Par hypothèse, f est dérivable en a : le taux tend vers le réel $f'(a)$. D'après la limite d'un produit, le produit tend vers $0 \times f'(a) = 0$.

L'hypothèse « limite **finie** » est indispensable : un taux qui tend vers l'infini ne permet pas de conclure ainsi.

Continue ne veut pas dire dérivable

Exemple : Contre-exemple : continue sans être dérivable

- Le coût de location L est continu en 10 : les deux formules donnent 50. Pourtant, il n'est pas dérivable en 10, car $L'_g(10) = 3$ et $L'_d(10) = 5$ diffèrent.
- L'implication dans l'autre sens est donc fausse : « continue » n'entraîne pas « dérivable ». Une courbe sans coupure peut avoir un angle.
- Une racine carrée qui s'annule peut donner un autre cas : la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue en 1, mais sa courbe y a une demi-tangente verticale.

À toi : Une demi-tangente verticale

Soit $v(x) = \sqrt{x-1}$ sur $[1;+\infty[$. La fonction v est-elle dérivable à droite en 1 ? Interprète le résultat sur la courbe. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris le taux $\dfrac{v(1+h)-v(1)}{h}$ pour $h>0$, avec $v(1)=0$.
Indice 2
Pour $h>0$, écris $h = \sqrt{h}\times\sqrt{h}$ pour simplifier le taux.
Indice 3
Point délicat : quand h tend vers 0 avec $h>0$, $\sqrt{h}$ tend vers 0 en restant positif ; regarde le signe de la limite.

Réponse
Pour $h>0$, $v(1+h)-v(1) = \sqrt{h}$, et le taux vaut $\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

Quand h tend vers 0 avec $h>0$, $\sqrt{h}$ tend vers 0 en restant positif. D'après la limite de l'inverse, le taux tend vers $+\infty$.

La limite n'est pas finie : v n'est pas dérivable à droite en 1. Or v est continue en 1 : sa courbe admet au point $(1;0)$ une demi-tangente verticale.

Fonction dérivée et opérations

Un nombre dérivé pour chaque point

Devine : Le nombre dérivé en un point quelconque

Pour $f : x \mapsto 3x^2 - 5x$, on a trouvé $f'(2) = 7$. Pour un réel a quelconque et $h \neq 0$, le même calcul donne $f(a+h) - f(a) = (6a-5)h + 3h^2$. Que vaut $f'(a)$?

A. $f'(a) = 7$ pour tout a.

Faux.
7 est le nombre dérivé en 2 seulement : $6 \times 2 - 5 = 7$.

B. $f'(a) = 6a - 5 + 3h$
Faux.
Il reste à faire tendre h vers 0.

C. $f'(a) = 3a^2 - 5a$
Faux.
C'est $f(a)$, pas $f'(a)$.

D. $f'(a) = 6a - 5$
Juste.
Juste : le taux $6a - 5 + 3h$ tend vers $6a - 5$.

Correction
Pour $h \neq 0$, le taux vaut $\dfrac{(6a-5)h + 3h^2}{h} = 6a - 5 + 3h$. D'après la limite d'une somme, il tend vers $6a - 5$ quand h tend vers 0.

Donc, pour tout réel a, $f'(a) = 6a - 5$. En $a = 2$, on retrouve $f'(2) = 7$.

En clair. On n'a plus un seul nombre dérivé, mais un nombre dérivé pour chaque réel a. La règle $a \mapsto 6a - 5$ est une nouvelle fonction : la **fonction dérivée** de f. Elle donne en un seul calcul toutes les pentes des tangentes.

Définition : Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est **dérivable sur** I lorsqu'elle est dérivable en tout réel x de I. La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f ; on la note f'.

Sur un intervalle $[a; b]$, on dit que f est dérivable lorsqu'elle est dérivable sur $]a; b[$, à droite en a et à gauche en b.

Exemple : utiliser la fonction dérivée

Pour $f : x \mapsto 3x^2 - 5x$, la fonction dérivée est $f' : x \mapsto 6x - 5$, sur $\mathbb{R}$.

- En $x = 0$: $f'(0) = -5$, la tangente descend.
- En $x = 3$: $f'(3) = 13$, la tangente monte fortement.
- La tangente est horizontale quand $6x - 5 = 0$, c'est-à-dire en $x = \dfrac{5}{6}$.

Les dérivées usuelles

Un cas chiffré. Pour $x \mapsto x^2$ et $h \neq 0$, le taux entre a et $a+h$ vaut $\dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$.

D'après la limite d'une somme, il tend vers $2a$: la dérivée de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$. Le tableau suivant donne ainsi les dérivées des fonctions usuelles.

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Les fonctions suivantes sont dérivables sur les intervalles indiqués, avec pour dérivées :

- $x \mapsto k$, où k est un réel : dérivée $x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$;
- $x \mapsto x$: dérivée $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$;
- $x \mapsto x^n$, où n est un entier tel que $n \geq 2$: dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$;
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$: dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$: dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

La fonction racine carrée n'est pas dérivable à droite en 0.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Exemple : lire le tableau des dérivées usuelles

- La fonction $x \mapsto x^5$ a pour dérivée $x \mapsto 5x^4$, sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$: en -2, le nombre dérivé vaut $-\dfrac{1}{4}$.
- La fonction racine carrée a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$: en 9, le nombre dérivé vaut $\dfrac{1}{6}$.

Sommes, produits, quotients

Devine : Dériver une somme

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ ont pour dérivées $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 3x^2$. Selon toi, quelle est la dérivée de $x \mapsto x^2 + x^3$?

A. $x \mapsto 2x + 3x^2$

Juste.

Juste : la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

B. $x \mapsto 2x \times 3x^2$

Faux.

On ne multiplie pas les dérivées des deux termes d'une somme.

C. $x \mapsto 5x^4$

Faux.

On n'additionne pas les exposants : $x^2 + x^3$ n'est pas x^5.

D. $x \mapsto x^2 + x^3$

Faux.

Dériver transforme la fonction.

Correction

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées : $x \mapsto 2x + 3x^2$.

Contrôle en $x = 1$: le taux de $x \mapsto x^2 + x^3$ entre 1 et $1 + h$ vaut $5 + 4h + h^2$, qui tend vers $5 = 2 + 3$.

Propriété : Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, k un réel et n un entier tel que $n \geq 1$. Les fonctions suivantes sont dérivables sur I :

- $(u+v)' = u' + v'$ et $(k\,u)' = k\,u'$;
- $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$;
- $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$;
- si v ne s'annule pas sur I : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$.

En particulier, toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Exemple : un produit et un quotient

Un produit. La fonction $p : x \mapsto (x^2+1)(2x-3)$ est un produit $u\,v$, avec $u : x \mapsto x^2+1$ et $v : x \mapsto 2x-3$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} p'(x) &= 2x(2x-3) + 2(x^2+1) \\ &= 6x^2 - 6x + 2. \end{aligned}$$

Un quotient. La fonction $r : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$ est dérivable sur $]3;+\infty[$, où $x-3$ ne s'annule pas. Pour tout $x > 3$:

$$r'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}.$$

Méthode et pièges

Méthode : dériver en reconnaissant la forme

1. **Préciser** l'intervalle où la fonction est dérivable : dénominateur non nul, expression sous la racine strictement positive.
2. **Reconnaître** la forme : somme, produit $u\,v$, quotient $\frac{u}{v}$, puissance u^n.
3. **Nommer** u et v, écrire u' et v', puis **appliquer** la formule.
4. **Factoriser** le résultat : la forme factorisée sert à étudier le signe.

Attention : la dérivée d'un produit

✗ « La dérivée de $x \mapsto x^2(x+1)$ est $x \mapsto 2x \times 1 = 2x$. »

✓ La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées : $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$. Ici, on obtient $2x(x+1) + x^2 \times 1 = 3x^2 + 2x$.

Contrôle par le développement : $x^2(x+1) = x^3 + x^2$, de dérivée $3x^2 + 2x$. En $x = 1$, on trouve 5, et non 2.

À toi : Dériver un quotient

Soit $w : x \mapsto \frac{x^2}{x+2}$ sur $]-2;+\infty[$. Calcule $w'(x)$ et écris-la sous forme factorisée. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
C'est un quotient $\frac{u}{v}$, avec $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x+2$.
Indice 2
Applique $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$.
Indice 3
Point délicat : développe et réduis le numérateur avant de factoriser par x ; le dénominateur reste au carré.

Réponse
Sur $]-2;+\infty[$, $x+2$ ne s'annule pas. D'après la formule du quotient, pour tout $x > -2$:

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Composée, racine d'une fonction, réciproque

Une fonction dans une autre

Devine : Prédire une dérivée

On veut dériver $x \mapsto (2x+1)^2$. En développant, $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$. Quelle écriture de sa dérivée est juste ?

A. $x \mapsto 2(2x+1)$

Faux.

Elle vaut $4x + 2$: la moitié de la vraie dérivée. Il manque le facteur 2, dérivée de $x \mapsto 2x + 1$.

B. $x \mapsto 4(2x+1)$

Juste.

Juste : $8x + 4 = 4(2x+1)$.

C. $x \mapsto (2x+1)^2$

Faux.

La fonction n'est pas égale à sa dérivée.

D. $x \mapsto 2$

Faux.

C'est la dérivée de $x \mapsto 2x + 1$ seulement.

Correction

La dérivée de $x \mapsto 4x^2 + 4x + 1$ est $x \mapsto 8x + 4$, et $8x + 4 = 2 \times 2 \times (2x+1)$.

On reconnaît $2(2x+1)$, dérivée du carré, multipliée par 2, dérivée de la fonction intérieure $x \mapsto 2x + 1$. C'est la règle de la composée.

Propriété : Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(x)$ appartient à J pour tout x de I. Alors la fonction $g \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I,

$$(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'\big(u(x)\big).$$

Deux cas particuliers :

- si a et b sont des réels, la fonction $x \mapsto g(ax+b)$ a pour dérivée $x \mapsto a\,g'(ax+b)$;
- si u est dérivable et **strictement positive** sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Exemple : deux composées

Une puissance. La fonction $g : x \mapsto (5-x^2)^3$ est de la forme u^3, avec $u : x \mapsto 5-x^2$ et $u'(x) = -2x$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times (-2x)(5-x^2)^2 \\ &= -6x(5-x^2)^2. \end{aligned}$$

Une racine. La fonction $k : x \mapsto \sqrt{x^2+9}$ est de la forme $\sqrt{u}$, avec $u : x \mapsto x^2+9$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$k'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Deux pièges

Attention : la dérivée de la fonction intérieure

✗ « La dérivée de $x \mapsto (1-3x)^5$ est $x \mapsto 5(1-3x)^4$. »

✓ On multiplie par la dérivée de la fonction intérieure $x \mapsto 1-3x$, qui vaut -3. Comme $5 \times (-3) = -15$, la dérivée est $x \mapsto -15(1-3x)^4$.

Le signe compte : en $x = 0$, la vraie dérivée vaut -15, et non 5.

Attention : là où la racine s'annule

✗ « La fonction $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ est dérivable sur $[-2;2]$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. »

✓ La formule de $(\sqrt{u})'$ demande u **strictement positive**. Ici, $4-x^2 > 0$ seulement sur $]-2;2[$: la formule vaut sur cet intervalle ouvert.

En -2 et en 2, le dénominateur s'annule. Il faut étudier le taux de variation de chaque côté.

Vérifie : Où appliquer la formule

Soit $u : x \mapsto 2x - 6$. Sur quel intervalle la formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ s'applique-t-elle ?

A. Sur $[3; +\infty[$

Faux.

En 3, $u(3) = 0$: la formule demande u strictement positive.

B. Sur $\mathbb{R}$

Faux.

Pour $x < 3$, $2x - 6 < 0$: la racine n'est même pas définie.

C. Sur $]3; +\infty[$

Juste.

Juste : $2x - 6 > 0$ équivaut à $x > 3$.

D. Sur $]-\infty; 3[$

Faux.

C'est là que $2x - 6$ est strictement négatif.

Correction

On résout $2x - 6 > 0$, soit $x > 3$. Sur $]3; +\infty[$, la dérivée de $x \mapsto \sqrt{2x - 6}$ est $x \mapsto \dfrac{2}{2\sqrt{2x - 6}}$, c'est-à-dire $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x - 6}}$.

En 3, on étudie à part le taux de variation à droite.

La réciproque

Remarque : Rappel : la fonction réciproque

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors $J = f(I)$ est un intervalle. Chaque réel y de J a un seul antécédent x dans I. La fonction f^{-1}, qui à y associe x, est la **réciproque** de f. Sa courbe est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Devine : La pente de la courbe symétrique

La fonction $x \mapsto x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa courbe passe par $A(1; 2)$, où le nombre dérivé vaut 4. La courbe de sa réciproque est la symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$. Quel est le coefficient directeur de sa tangente au point $A'(2; 1)$?

A. 4

Faux.

La symétrie échange les rôles de x et de y : la pente change.

B. -4

Faux.

Les deux fonctions ont le même sens de variation : la pente reste positive.

C. 2

Faux.

C'est l'ordonnée de A, pas une pente.

D. $\dfrac{1}{4}$

Juste.

Juste : la symétrie échange montée et avancée, donc la pente devient $\dfrac{1}{4}$.

Correction

La tangente en A monte de 4 quand on avance de 1. Sa symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ monte de 1 quand on avance de 4 : son coefficient directeur est $\dfrac{1}{4}$. C'est l'inverse du nombre dérivé en 1.

Théorème : Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et f^{-1} sa fonction réciproque, définie sur l'intervalle $J = f(I)$. Soit a un réel de I et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Rappel : f^{-1} a le même sens de variation que f, et sa courbe est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque : Admis

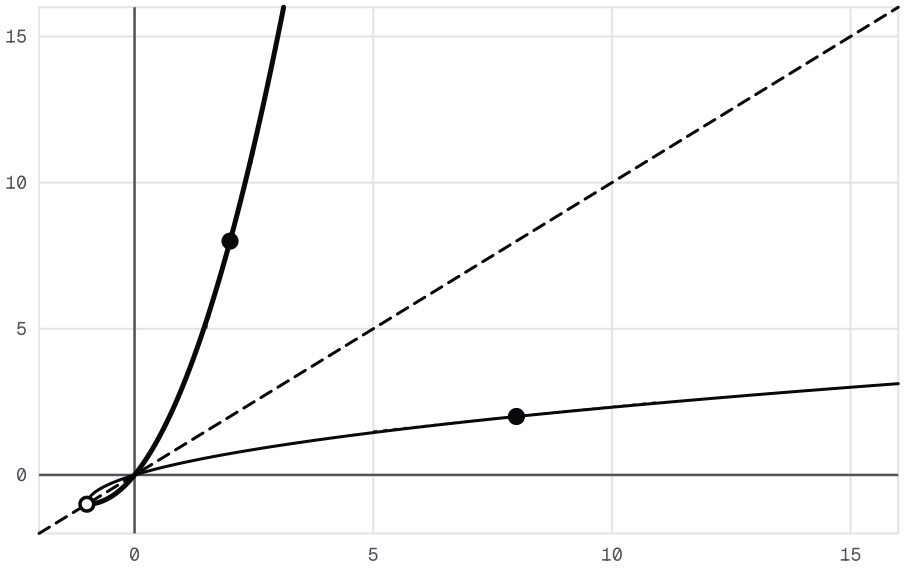
Ce résultat est admis.

Exemple : un nombre dérivé de la réciproque

Soit $g : x \mapsto x^2 + 2x$. Pour tout réel x, $g(x) = (x+1)^2 - 1$: g est continue et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$, où $x + 1 > 0$. On cherche $\left(g^{-1}\right)'(8)$.

- On trouve a tel que $g(a) = 8$: $a = 2$, car $4 + 4 = 8$.
- Pour tout réel x, $g'(x) = 2x + 2$, donc $g'(2) = 6 \neq 0$. Ainsi $\left(g^{-1}\right)'(8) = \dfrac{1}{g'(2)} = \dfrac{1}{6}$.

- Contrôle : ici, pour $y > -1$, $g^{-1}(y) = -1 + \sqrt{1+y}$. La dérivée de g^{-1} est $y \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{1+y}}$, qui vaut bien $\dfrac{1}{6}$ en 8.



$\mathcal{C}_g$ $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ $y = x$ Point plein A Point plein A' Point du graphe
Point exclu du graphe

La courbe de g : x ↦ x² + 2x et celle de sa réciproque, symétriques par rapport à la droite d'équation y = x. La tangente en A(2 ; 8) a pour coefficient directeur 6 ; sa symétrique en A'(8 ; 2), 1/6.

Borne exclue en x = –1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ –1.

Méthode et pratique

Méthode : dérivée de la réciproque en un point

1. **Vérifier** que f est continue et strictement monotone sur I ; déterminer $J = f(I)$.
2. **Trouver** le réel a de I tel que $f(a) = b$, par un calcul simple ou une valeur donnée.
3. **Vérifier** que $f'(a) \neq 0$, puis écrire $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
4. **Tracer** la courbe de f^{-1} comme la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

À toi : La réciproque en un point

Soit $f : x \mapsto x^3 + 2x - 1$, sur $\mathbb{R}$. Justifie que f est continue et strictement croissante, puis calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Une somme de deux fonctions strictement croissantes est strictement croissante.

Indice 2

Cherche un entier a tel que $f(a) = 2$.

Indice 3

Point délicat : le nombre dérivé utile se calcule en l'antécédent a de 2, et non en 2.

Réponse

Monotonie. Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 2x - 1$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$: leur somme f l'est aussi. Elle est continue, car c'est un polynôme.

Antécédent. On a $f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 2$, donc $f'(1) = 5 \neq 0$.

Conclusion. D'après la dérivée de la fonction réciproque, $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{5}$.

Signe de la dérivée, variations, extremums

Le signe de la dérivée

Devine : Des tangentes qui montent

Sur un intervalle I, toutes les tangentes à la courbe d'une fonction f ont un coefficient directeur strictement positif. Que peux-tu prévoir pour f sur I ?

A. f est positive sur I.

Faux.

Le signe de f' renseigne sur les variations, pas sur le signe de f.

B. f est décroissante sur I.

Faux.

Des tangentes qui montent décrivent une courbe qui monte.

C. f est strictement croissante sur I.

Juste.

Juste : c'est le lien entre le signe de la dérivée et les variations.

D. f est constante sur I.

Faux.

Une fonction constante a des tangentes horizontales : $f' = 0$.

Correction

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x est $f'(x)$. Ici, $f'(x) > 0$ pour tout x de I : la courbe monte partout sur I, et f est strictement croissante sur I.

L'énoncé suivant le dit précisément.

Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors f est croissante sur I ; si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I. De même, si $f'(x) < 0$ sauf en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I, alors f est constante sur I.

Ces conclusions valent encore sur un intervalle $[a;b]$ lorsque f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ (de même avec un intervalle semi-ouvert).

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Exemple : du signe de la dérivée au tableau de variations

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$. Pour tout réel x, $f'(x) = 6(x + 2)(x - 1)$. On a $f(-2) = 16$ et $f(1) = -11$.

En $-\infty$ et en $+\infty$, seul compte le terme de plus haut degré, $2x^3$: il donne les limites de $f(x)$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-11	$\nearrow$	$+\infty$

- Comme $f'(x) > 0$ sur $]-\infty;-2[$, f est strictement croissante sur $]-\infty;-2]$.
- Comme $f'(x) < 0$ sur $]-2;1[$, elle est strictement décroissante sur $[-2;1]$.
- Comme $f'(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$, elle est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Méthode et piège

Méthode : dresser un tableau de variations

1. **Déterminer** l'ensemble de définition et l'intervalle où f est dérivable.
2. **Calculer** $f'(x)$ et l'écrire sous forme factorisée.

3. **Étudier** le signe de $f'(x)$ dans un tableau de signes : une ligne par facteur, puis la règle des signes. Rappel : $ax+b$, avec $a \neq 0$, a le signe de a à droite de $-\dfrac{b}{a}$; un trinôme a le signe de son premier coefficient hors de ses racines.
4. **En déduire** les variations, en nommant le signe de f' et l'intervalle ; elles valent aussi aux bornes où f est continue. Compléter avec les valeurs et les limites aux bornes.

Attention : un intervalle à la fois

✗ « Pour $s(x) = \dfrac{3}{x-1}$, $s'(x) = -\dfrac{3}{(x-1)^2} < 0$: donc s est décroissante sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. »

✓ Le lien entre le signe de la dérivée et les variations vaut **sur un intervalle**. Ici, $s'(x) < 0$ sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$: s est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles, séparément.

Sur la réunion, c'est faux : $0 < 2$, et pourtant $s(0) = -3 < 3 = s(2)$.

Extremums

Une image. Relis le tableau de f. La courbe monte jusqu'au point $(-2;16)$, puis descend, comme le sommet d'une colline.

Près de -2, par exemple pour x dans $]-3;1[$, aucune valeur de f ne dépasse 16. Plus loin, pourtant, $f(3) = 41$: 16 n'est le plus grand que près de -2. On dit que 16 est un **maximum local** de f.

Définition : Extremums d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I lorsque $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I ; c'est le **minimum** de f sur I lorsque $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I.
- $f(a)$ est un **maximum local** de f lorsqu'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de $I \cap J$. On définit de même un **minimum local**.

Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**.

Vérifie : Lire un extremum

Dans le tableau de variations de $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$, quelle est la nature de $f(1) = -11$?

A. C'est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Faux.
Non : $f(x)$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$; par exemple, $f(-4) = -36$.

B. C'est un maximum local de f.

Faux.
Autour de 1, f descend puis monte : c'est un creux, pas un sommet.

C. Ce n'est pas un extremum.
Faux.
Sur $]-2;3[$, par exemple, $f(x) \geq -11$.

D. C'est un minimum local de f.
Juste.
Juste : autour de 1, f descend puis monte.

Correction
Comme $f'(x) < 0$ sur $]-2;1[$, f est décroissante sur $[-2;1]$; comme $f'(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$, elle est croissante sur $[1;+\infty[$.

Pour tout x de l'intervalle ouvert $]-2;3[$, qui contient 1, on a donc $f(x) \geq f(1)$: -11 est un minimum local. Ce n'est pas le minimum sur $\mathbb{R}$, car $f(-4) = -36$.

On vérifie aussi $f'(1) = 6 + 6 - 12 = 0$ et $f'(-2) = 24 - 12 - 12 = 0$: aux deux extremums locaux, la tangente est horizontale.

Propriété : Dérivée en un extremum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse : $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour que f admette un extremum en a.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Le changement de signe

Exemple : Pourquoi est-ce vrai ? Un cas chiffré

Un cas chiffré d'abord : la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 4x$ a pour dérivée $f'(x) = 2(2 - x)$, positive avant 2 et négative après. Pour tout réel x, $f(x) = 4 - (x-2)^2 \leq 4 = f(2)$: $f(2)$ est un maximum, et $f'(2) = 0$.

En général, si f' est positive juste avant a et négative juste après, f monte jusqu'en a, puis descend. La preuve, sous l'énoncé, se lit pour comprendre.

Propriété : Extremum et changement de signe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a un réel de I et α un réel strictement positif tel que $]a-\alpha;a+\alpha[$ soit inclus dans I.

- Si $f'(x)\geq 0$ sur $]a-\alpha;a]$ et $f'(x)\leq 0$ sur $[a;a+\alpha[$, alors $f(a)$ est un maximum local de f.
- Si $f'(x)\leq 0$ sur $]a-\alpha;a]$ et $f'(x)\geq 0$ sur $[a;a+\alpha[$, alors $f(a)$ est un minimum local de f.

On dit alors que f' s'annule en a **en changeant de signe**.

Démonstration

Étape 1. Premier cas. D'après le lien entre le signe de la dérivée et les variations, appliqué sur l'intervalle $]a-\alpha;a]$, la fonction f y est croissante : pour tout x de cet intervalle, $f(x)\leq f(a)$.

Étape 2. De même, f est décroissante sur $[a;a+\alpha[$: pour tout x de cet intervalle, $f(x)\leq f(a)$.

Étape 3. Ainsi $f(x)\leq f(a)$ pour tout x de l'intervalle ouvert $]a-\alpha;a+\alpha[$, qui contient a : par définition d'un extremum local, $f(a)$ est un maximum local de f. Le second cas se traite de la même façon, en échangeant croissante et décroissante.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve lit les **variations de chaque côté** de a, grâce au lien entre le signe de la dérivée et les variations (admis). Elle compare ensuite $f(x)$ à $f(a)$ sur un intervalle ouvert qui contient a. La définition d'un maximum local conclut.

Vérifie : Appliquer le changement de signe

Une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x)=2(1-x)$. Que peux-tu dire de $f(1)$?

A. C'est un minimum local de f.

Faux.
Avant 1, $f'(x)>0$: f monte jusqu'en 1. C'est un sommet, pas un creux.

B. C'est un maximum local de f.

Juste.
Juste : f' s'annule en 1 en passant du signe plus au signe moins.

C. Ce n'est pas un extremum de f.

Faux.
Ici, f' change de signe en 1 : l'énoncé s'applique.

D. On ne peut rien dire sans f.

Faux.
Le signe de f' suffit : l'énoncé n'a pas besoin de l'expression de f.

Correction

On a $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty;1]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[1;+\infty[$: f' s'annule en 1 en changeant de signe, du positif au négatif. D'après l'énoncé, $f(1)$ est un maximum local de f.

Par exemple, $x \mapsto -x^2+2x+5$ a cette dérivée, et son maximum local vaut 6.

Un contre-exemple, puis à toi

Exemple : Contre-exemple : une dérivée nulle sans extremum

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x-1)^3+4$. Pour tout réel x, $g'(x)=3(x-1)^2$: la dérivée s'annule en 1, mais reste strictement positive de chaque côté.

La dérivée ne change pas de signe : comme $g'(x)>0$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 1, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour $x<1$, $g(x)<g(1)$, et pour $x>1$, $g(x)>g(1)$: $g(1)=4$ n'est pas un extremum.

L'hypothèse « changement de signe » est indispensable.

À toi : Les extremums locaux

Soit $m(x)=-x^3+3x^2+9x-2$ sur $\mathbb{R}$. Dresse son tableau de variations et donne ses extremums locaux. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $m'(x)$, puis cherche les racines de ce trinôme.
Indice 2
Écris $m'(x)$ sous forme factorisée et étudie le signe de chaque facteur dans un tableau de signes.
Indice 3
Point délicat : un facteur constant négatif inverse le signe du produit des autres facteurs.

Réponse
Dérivée. Pour tout réel x, $m'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$.

Signe. La dérivée est strictement négative sur $]-\infty;-1[$ et sur $]3;+\infty[$, strictement positive sur $]-1;3[$.

Variations. D'après le signe de m' sur chacun de ces intervalles, m est décroissante sur $]-\infty;-1]$, croissante sur $[-1;3]$, décroissante sur $[3;+\infty[$.

Extremums. La dérivée s'annule en changeant de signe en -1 et en 3 : $m(-1)=-7$ est un minimum local, et $m(3)=25$ est un maximum local.

Problèmes d'optimisation

Le meilleur bénéfice

Une coopérative fictive fabrique des tapis. Elle en vend q centaines par an, avec $q \in [0;10]$. Son bénéfice, en milliers de dirhams, vaut (données fictives) :

$$B(q) = -2q^3 + 15q^2 + 36q - 50.$$

Combien de tapis doit-elle produire pour gagner le plus ?

Devine : Produire le plus possible ?

Selon toi, pour quelle valeur de q le bénéfice $B(q)$ est-il le plus grand ?

A. $q = 10$: produire le plus possible.

Faux.

$B(10) = -190$: trop produire coûte plus que ce que la vente rapporte.

B. $q = 0$: ne rien produire.

Faux.

$B(0) = -50$: la coopérative paie ses charges fixes.

C. $q = 6$: six cents tapis.

Juste.

Juste : $B(6) = 274$, la plus grande valeur sur $[0;10]$.

D. $q = 5$: le milieu de l'intervalle.

Faux.

$B(5) = 255$, moins que $B(6) = 274$: le milieu n'a rien de spécial.

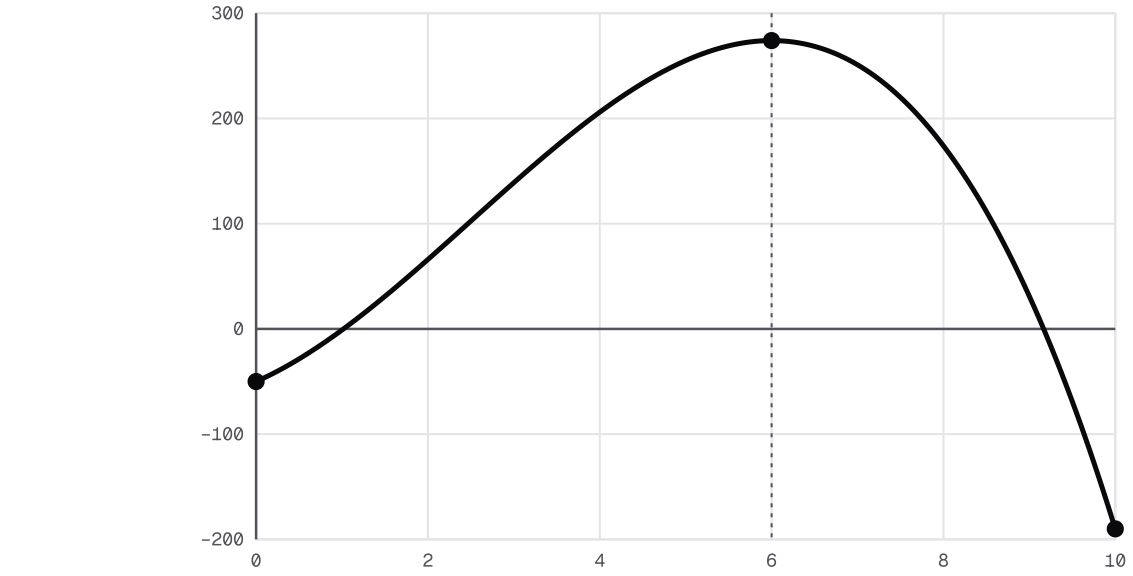
Correction

Pour tout q de $[0;10]$:

$$\begin{aligned} B'(q) &= -6q^2 + 30q + 36 \\ &= -6(q+1)(q-6). \end{aligned}$$

Sur $[0;10]$, $q+1 > 0$: le signe de $B'(q)$ est celui de $-6(q-6)$.

Comme $B'(q) \geq 0$ sur $[0;6]$, B y est croissante ; comme $B'(q) \leq 0$ sur $[6;10]$, elle y est décroissante. Le bénéfice est maximal en $q = 6$. La courbe ci-dessous le confirme.



Bénéfice de la coopérative en fonction de q

Exemple : rédiger la recherche du maximum

Sur $[0;10]$, $B'(q) = -6(q+1)(q-6)$, avec $q+1>0$.

q	0		6		10
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	-50	$\nearrow$	274	$\searrow$	-190

Comme $B'(q) \geq 0$ sur $[0;6]$, B y est croissante ; comme $B'(q) \leq 0$ sur $[6;10]$, B y est décroissante.

Conclusion. Le maximum de B sur $[0;10]$ est $B(6) = 274$. La coopérative doit produire 600 tapis ; son bénéfice est alors de 274 milliers de dirhams.

La méthode

Méthode : résoudre un problème d'optimisation

1. **Choisir** la variable (quantité, prix) et son intervalle, imposé par la situation.
2. **Exprimer** la grandeur à optimiser (bénéfice, coût moyen, recette) en fonction de cette variable.
3. **Étudier** ses variations par le signe de la dérivée, sur cet intervalle.
4. **Lire** dans le tableau la valeur qui donne le maximum ou le minimum, puis **répondre** à la question posée, avec l'unité.

Attention : rester dans l'intervalle, puis répondre

✗ « $B'(q) = 0$ pour $q = -1$ ou $q = 6$: le bénéfice est maximal pour ces deux valeurs. »

✓ La valeur $q = -1$ n'est pas dans $[0; 10]$: une quantité ne peut pas être négative. Et $B'(q) = 0$ ne suffit pas : c'est le tableau de variations qui montre un maximum en 6.

Enfin, on répond à la question : 600 tapis, pour un bénéfice de 274 milliers de dirhams.

Le coût moyen le plus bas

Une usine fictive produit q tonnes d'engrais par jour, avec $q \in]0; 20]$. Son coût total, en centaines de dirhams, vaut $K(q) = q^2 + 4q + 64$ (données fictives).

Le **coût moyen** d'une tonne est, pour tout q de $]0; 20]$:

$$C_M(q) = \frac{K(q)}{q} = q + 4 + \frac{64}{q}.$$

Il est élevé pour une petite production : les 64 centaines de dirhams fixes pèsent sur peu de tonnes.

Vérifie : Où la dérivée s'annule

La dérivée du coût moyen est $C'_M(q) = 1 - \dfrac{64}{q^2} = \dfrac{(q-8)(q+8)}{q^2}$. Pour quelle valeur de q de $]0; 20]$ s'annule-t-elle ?

A. $q = 64$
Faux.
On résout $q^2 = 64$, et non $q = 64$.

B. $q = 8$
Juste.
Juste : $(q-8)(q+8) = 0$ et $q > 0$.

C. $q = 8$ ou $q = -8$
Faux.
La valeur -8 n'est pas dans $]0; 20]$.

D. $q = 4$
Faux.
$C'_M(4) = 1 - 4 = -3$: elle ne s'annule pas en 4.

Correction
Sur $]0; 20]$, $q^2 > 0$ et $q + 8 > 0$. La dérivée s'annule donc seulement si $q - 8 = 0$, soit $q = 8$.

Elle est négative avant 8 et positive après.

À toi : Le coût moyen minimal

Déduis du signe de $C'_M(q)$ les variations du coût moyen sur $]0;20]$. Quelle production rend le coût moyen minimal ? Que vaut-il alors ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Sur $]0;20]$, q^2 et $q+8$ sont strictement positifs : regarde le facteur qui reste.
Indice 2
Calcule le coût moyen là où la dérivée s'annule.
Indice 3
Point délicat : réponds avec les unités, en tonnes et en centaines de dirhams par tonne.

Réponse
Comme $C'_M(q)<0$ sur $]0;8[$, C_M est strictement décroissante sur $]0;8]$. Comme $C'_M(q)>0$ sur $]8;20]$, elle est strictement croissante sur $[8;20]$.

Le minimum est donc $C_M(8)=8+4+8=20$.

Conclusion. L'usine doit produire 8 tonnes par jour ; le coût moyen vaut alors 20 centaines de dirhams par tonne, soit $2\,000$ dirhams.

Remarque **: Coin examen : la phrase de conclusion**

À l'examen, la dernière ligne répond à la question, avec les mots de l'énoncé. Par exemple :
« D'après le tableau de variations, B admet sur $[0;10]$ un maximum égal à $B(6)=274$. La coopérative réalise donc un bénéfice maximal de 274 milliers de dirhams en vendant 600 tapis. »

Une valeur de q seule, sans phrase ni unité, laisse la question sans réponse.

Dérivée seconde, concavité, points d'inflexion

Au-dessus ou au-dessous des tangentes

Devine : La parabole et ses tangentes

La tangente à la courbe de $x\mapsto x^2$ au point d'abscisse a a pour équation $y=2ax-a^2$. Où se trouve la courbe par rapport à ses tangentes ?

A. Au-dessus de chacune, ou dessus.
Juste.
Juste : l'écart vaut $(x-a)^2$, qui est positif.

B. Au-dessous de chacune, ou dessus.
Faux.
Calcule l'écart $x^2-(2ax-a^2)$: il n'est jamais négatif.

C. Au-dessus pour $a > 0$, au-dessous pour $a < 0$.

Faux.

Le signe de a ne change rien : l'écart est un carré.

D. Elle traverse chacune de ses tangentes.

Faux.

L'écart $(x-a)^2$ ne change pas de signe en a.

Correction

L'écart entre la courbe et la tangente vaut, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 - (2ax - a^2) &= x^2 - 2ax + a^2 \\ &= (x-a)^2. \end{aligned}$$

Un carré est positif : la parabole ne passe jamais sous l'une de ses tangentes. Cette propriété porte un nom : la courbe est **convexe**.

Définition : Dérivée seconde, concavité et point d'inflexion

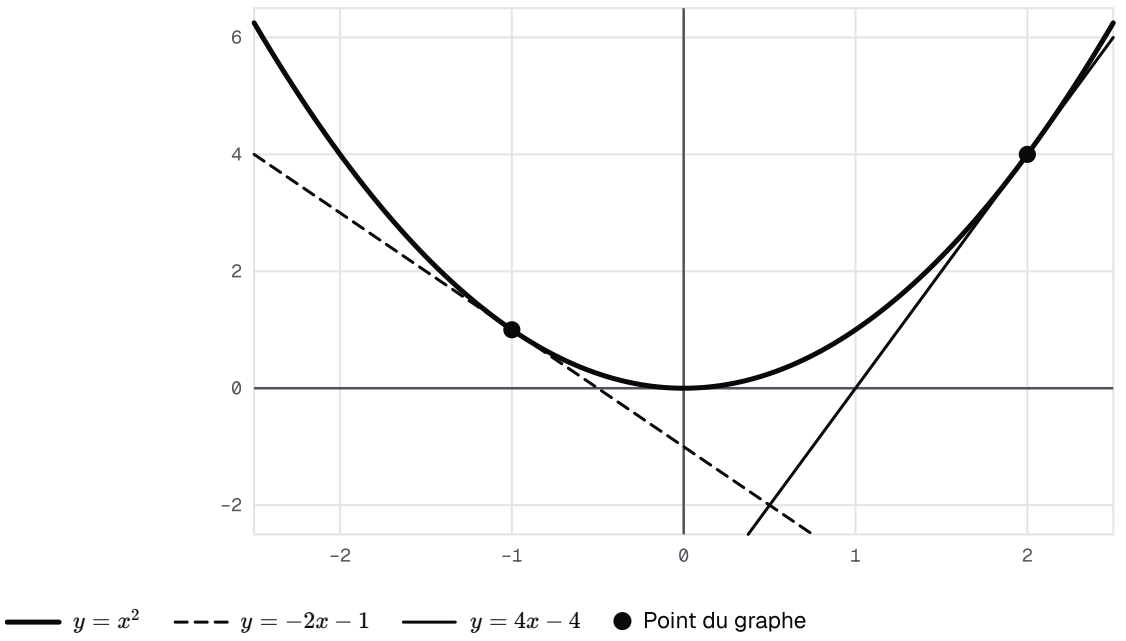
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la fonction f' est elle-même dérivable sur I, sa dérivée est la **dérivée seconde** de f, notée f''.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I lorsqu'elle est située au-dessus de chacune de ses tangentes en un point d'abscisse appartenant à I ; elle est **concave** sur I lorsqu'elle est située au-dessous de chacune de ces tangentes.

Le point $A(a ; f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ lorsque la courbe change de concavité en A : elle y traverse sa tangente.

Exemple : convexe, concave, inflexion

- La courbe de $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$: on vient de le montrer.
- La courbe de $x \mapsto -x^2$ est concave sur $\mathbb{R}$: l'écart à la tangente vaut $-(x-a)^2$, négatif.
- La courbe de $x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$: la dérivée seconde le justifiera. Elle change de concavité à l'origine, qui est donc un point d'inflexion. Elle y traverse sa tangente d'équation $y = 0$, car x^3 change de signe en 0.



La parabole d'équation y = x² et deux de ses tangentes, aux points d'abscisses –1 et 2 : la courbe reste au-dessus de chacune, elle est convexe.

Le signe de la dérivée seconde

Propriété : Concavité et signe de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Exemple : étudier la concavité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 2$. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$.

- Sur $]-\infty ; 2[$, $f''(x) < 0$: la courbe est concave.
- Sur $]2 ; +\infty[$, $f''(x) > 0$: la courbe est convexe.

Devine : Ce qui se passe en 2

Pour $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 10x - 2$, la dérivée seconde $f''(x) = 6(x-2)$ s'annule en 2 en changeant de signe. Que fait la courbe au point $A(2;2)$?

A. Elle atteint un maximum local.

Faux.
Un extremum se lit sur le signe de f', pas de f''. Ici, $f'(2) = -2$.

B. Elle traverse sa tangente.

Juste.
Juste : elle passe de concave à convexe.

C. Sa tangente est horizontale.

Faux.
Le coefficient directeur de la tangente est $f'(2) = -2$, non nul.

D. Rien de particulier.

Faux.
La concavité change en A.

Correction
La tangente en A a pour équation $y = -2(x-2) + 2$, soit $y = -2x + 6$.

Comme f'' change de signe en 2, la courbe passe de concave à convexe : le point A est un **point d'inflexion**.

Pour tout réel x, l'écart entre la courbe et la tangente vaut :

$$\begin{aligned} &f(x) - (-2x + 6) \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ &= (x-2)^3. \end{aligned}$$

Il change de signe en 2 : la courbe traverse sa tangente.

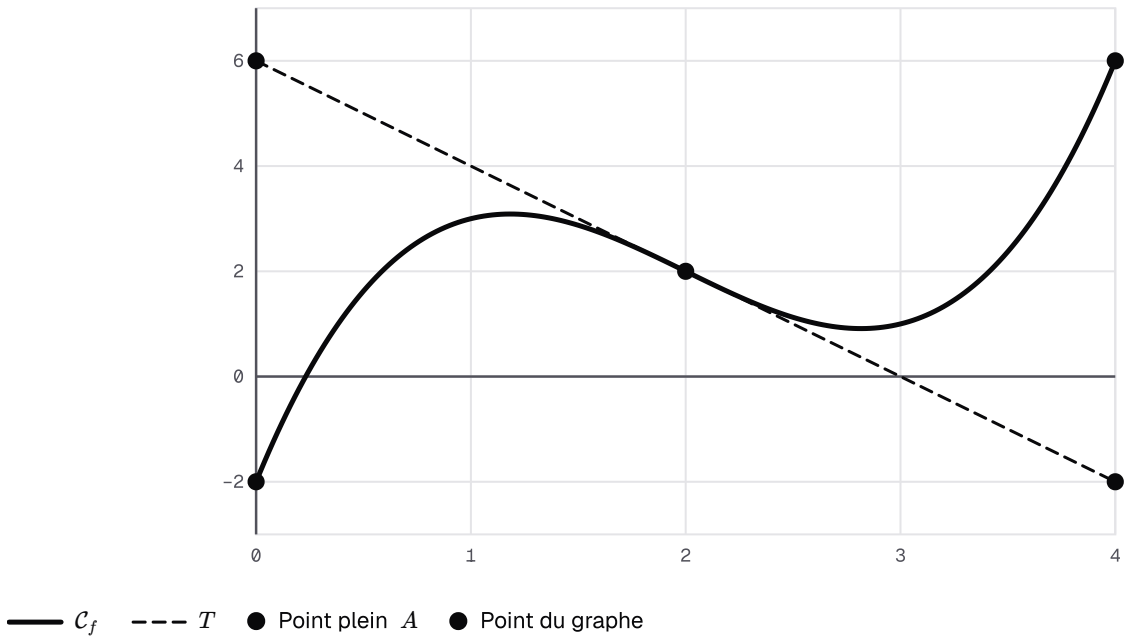
Le point d'inflexion

Propriété : Point d'inflexion et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.



Un point d'inflexion : la courbe traverse sa tangente

Méthode et pratique

Méthode : concavité et points d'inflexion

1. **Calculer** $f''(x)$ en dérivant $f'(x)$.
2. **Étudier** le signe de $f''(x)$ sur l'ensemble où f est deux fois dérivable.
3. **Conclure** : là où $f'' \geq 0$, la courbe est convexe ; là où $f'' \leq 0$, elle est concave.
4. **Repérer** les réels où f'' s'annule en changeant de signe : ce sont les abscisses des points d'inflexion. Calculer leurs ordonnées.

À toi : Quand le coût s'accélère

Une entreprise fictive a un coût total $T(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 10$, en milliers de dirhams, pour q centaines d'objets. Étudie la concavité de sa courbe sur $]0;+\infty[$ et trouve son point d'inflexion. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $T'(q)$, puis $T''(q)$.
Indice 2
Factorise $T''(q)$, puis étudie son signe sur $]0;+\infty[$.
Indice 3
Point délicat : un point d'inflexion demande que T'' change de signe ; calcule aussi l'ordonnée $T(2)$.

Réponse

Dérivées. Pour tout $q > 0$, $T'(q) = 3q^2 - 12q + 15$ et $T''(q) = 6q - 12 = 6(q-2)$.

Concavité. Sur $]0;2[$, $T''(q) < 0$: la courbe est concave. Sur $]2;+\infty[$, $T''(q) > 0$: elle est convexe.

Inflexion. T'' s'annule en 2 en changeant de signe, et $T(2) = 24$: le point $(2;24)$ est un point d'inflexion.

Lecture économique. Comme $T''(q) > 0$ sur $]2;+\infty[$, T' est croissante sur $[2;+\infty[$: au-delà de 200 objets, le coût d'une centaine d'objets de plus, estimé par $T'(q)$, augmente.

Branches infinies

Asymptotes verticales et horizontales

Remarque **: Rappel : limites en l'infini**

- En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.
- Un quotient de deux polynômes a la même limite que le quotient de leurs termes de plus haut degré. Par exemple, en $+\infty$, $\dfrac{3x-1}{x+1}$ a la limite de $\dfrac{3x}{x} = 3$.
- Pour le justifier, on factorise le numérateur et le dénominateur par la plus grande puissance de x, comme dans l'exemple ci-dessous.

Devine : Une toute petite production

Reprends le coût moyen de l'usine d'engrais : $C_M(q) = q + 4 + \dfrac{64}{q}$, pour $q > 0$. Que devient $C_M(q)$ quand q tend vers 0 ?

A. Il tend vers 4.

Faux.
Le terme $\dfrac{64}{q}$ ne tend pas vers 0 : il devient très grand.

B. Il tend vers 64.

Faux.
64 est la charge fixe totale, pas la limite du coût moyen.

C. Il tend vers 0.

Faux.
Une production presque nulle ne rend pas le coût moyen nul.

D. Il tend vers $+\infty$.

Juste.
Juste : les charges fixes se répartissent sur presque rien.

Correction

Quand q tend vers 0 avec $q > 0$, $\dfrac{64}{q}$ tend vers $+\infty$ (limite de l'inverse), et $q + 4$ tend vers 4. D'après la limite d'une somme, $C_M(q)$ tend vers $+\infty$.

La courbe du coût moyen longe l'axe des ordonnées : cet axe est une **asymptote verticale**.

Définition : Asymptotes à une courbe

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

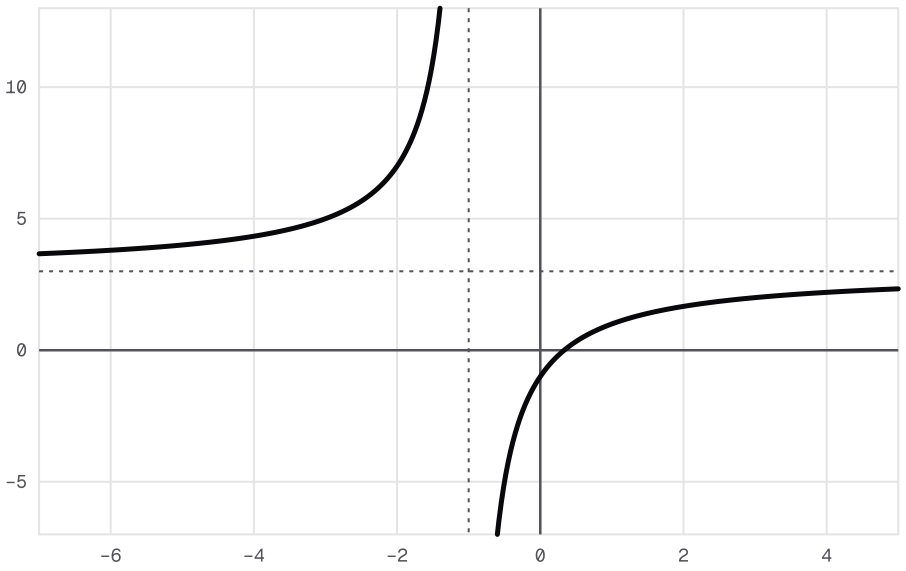
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers le réel x_0 (à droite ou à gauche), la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, où b est un réel, la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$, où a et b sont des réels avec $a \neq 0$, la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

On définit de même les asymptotes au voisinage de $-\infty$.

Exemple : deux asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ privé de -1 par $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 1}$.

- **En -1.** Quand x tend vers -1 avec $x > -1$, le numérateur tend vers -4 et le dénominateur vers 0 par valeurs positives : $f(x)$ tend vers $-\infty$. Avec $x < -1$, $f(x)$ tend vers $+\infty$. La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale.
- **À l'infini.** Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$, qui tend vers 3 en $+\infty$ et en $-\infty$ (limite d'un quotient). La droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale.



La courbe de f : x ↦ (3x − 1)/(x + 1) et ses deux asymptotes : la droite d'équation x = −1, verticale, et la droite d'équation y = 3, horizontale.

Asymptote oblique

Pourquoi est-ce vrai ? Un cas chiffré d'abord : soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$. Alors $\dfrac{f(x)}{x} = 2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ tend vers 2, et $f(x) - 2x = 1 + \dfrac{1}{x}$ tend vers 1 en $+\infty$: on retrouve la droite d'équation $y = 2x + 1$.

En général, ces deux limites caractérisent l'asymptote. La preuve, sous l'énoncé, se lit pour comprendre.

Propriété : Recherche d'une asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c;+\infty[$, et a et b deux réels avec $a \neq 0$. La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = b.$$

On a le même résultat au voisinage de $-\infty$.

Démonstration

Étape 1. Pour tout réel x de $]c;+\infty[$, on pose $\varepsilon(x) = f(x) - (ax + b)$, de sorte que $f(x) - ax = b + \varepsilon(x)$.

Étape 2. Supposons que la droite est asymptote, c'est-à-dire, par définition, que $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. D'après les opérations sur les limites, $f(x) - ax = b + \varepsilon(x)$ tend vers b.
Pour $x > 0$, on a aussi $\dfrac{f(x)}{x} = a + \big(b + \varepsilon(x)\big) \times \dfrac{1}{x}$, qui tend vers $a + b \times 0 = a$.

Étape 3. Réciproquement, si $f(x) - ax$ tend vers b, alors $\varepsilon(x) = \big(f(x) - ax\big) - b$ tend vers 0 : la droite est asymptote. Ce sens n'utilise que la seconde limite ; la première sert, en pratique, à trouver a. Au voisinage de $-\infty$, la preuve est la même, avec $x < 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée réutilisable : **nommer l'écart** entre la courbe et la droite, noté $\varepsilon(x) = f(x) - (ax + b)$ (la lettre grecque epsilon). Toute la preuve se ramène à la limite de cet écart, par les opérations sur les limites. Pour montrer que la droite est asymptote, seule la limite de $f(x) - ax$ sert ; celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ sert à trouver a.

Vérifie : Appliquer la recherche d'asymptote

Une fonction f, définie sur $]0; +\infty[$, vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - 3x\big) = -2$. Que peux-tu conclure en $+\infty$?

A. La droite d'équation $y = 3x - 2$ est asymptote.

Juste.
Juste : $a = 3$ et $b = -2$.

B. La droite d'équation $y = -2x + 3$ est asymptote.

Faux.
Les rôles sont échangés : la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ donne le coefficient directeur.

C. Une branche parabolique de direction $y = 3x$.

Faux.
Ce serait le cas si $f(x) - 3x$ tendait vers l'infini ; ici, elle tend vers un réel.

D. On ne peut rien conclure.

Faux.
Les deux limites de l'énoncé sont connues : elles suffisent.

Correction
D'après la recherche d'une asymptote oblique, avec $a = 3$ et $b = -2$, la droite d'équation $y = 3x - 2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto 3x - 2 + \dfrac{1}{x}$ vérifie ces deux limites : $\dfrac{f(x)}{x} = 3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ et $f(x) - 3x = -2 + \dfrac{1}{x}$.

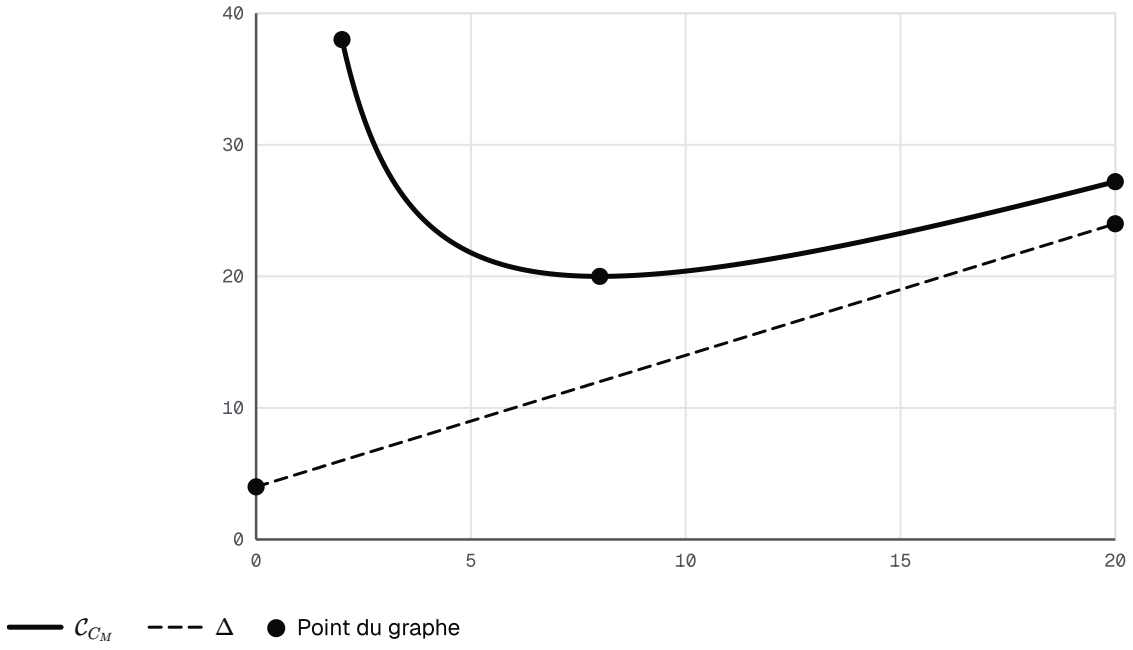
Le coût moyen pour q grand

Exemple : l'asymptote oblique du coût moyen

Le coût moyen n'est défini que sur $]0;20]$. On étudie ici la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par la même expression, $q \mapsto q+4+\dfrac{64}{q}$, sans la limite de production de l'usine. Pour tout $q>0$:

- $\dfrac{C_M(q)}{q} = 1+\dfrac{4}{q}+\dfrac{64}{q^2}$, qui tend vers 1 en $+\infty$;
- $C_M(q)-q = 4+\dfrac{64}{q}$, qui tend vers 4 en $+\infty$.

D'après la recherche d'une asymptote oblique, la droite d'équation $y=q+4$ est asymptote à la courbe de cette fonction en $+\infty$. Pour q grand, $C_M(q)$ est proche de $q+4$.



Le coût moyen et son asymptote oblique

Branches paraboliques

Deux cas chiffrés. En $+\infty$, x^2 et $\sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$.

Mais $\dfrac{x^2}{x}=x$ tend vers $+\infty$: la courbe monte de plus en plus vite. Et, pour $x>0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 : la courbe monte de moins en moins vite.

La limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ donne la direction de la courbe.

Définition : Branches paraboliques

Soit f une fonction telle que $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

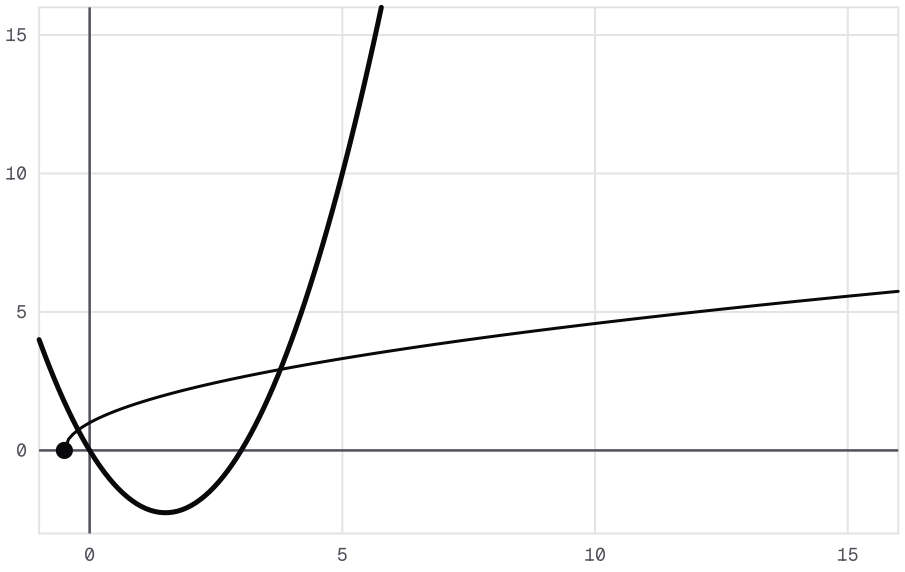
- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.

- Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0, elle admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers un réel a non nul et si $f(x) - ax$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, elle admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

On définit de même les branches paraboliques au voisinage de $-\infty$.

Exemple : deux branches paraboliques

- Pour $f(x) = x^2 - 3x$: en $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$, et $\frac{f(x)}{x} = x - 3$ aussi. Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- Pour $g(x) = \sqrt{2x+1}$: en $+\infty$, $g(x)$ tend vers $+\infty$, et, pour $x > 0$, $\frac{g(x)}{x} = \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$ tend vers 0. Branche parabolique de direction l'axe des abscisses.



Deux branches paraboliques : la courbe de x ↦ x² − 3x se dresse, de direction l'axe des ordonnées ; celle de x ↦ √(2x + 1) s'aplatit, de direction l'axe des abscisses.

Attention : la première limite ne suffit pas

✗ « Pour $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$, $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 4 : la droite d'équation $y = 4x$ est donc une asymptote. »

✓ Il faut encore que $f(x) - 4x$ tende vers un réel. Ici, $f(x) - 4x = -2\sqrt{x}$ tend vers $-\infty$.

En $+\infty$, la courbe a donc une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 4x$, et aucune asymptote oblique.

Méthode et pratique

Méthode : étudier les branches infinies

1. **Aux bornes finies** x_0 de l'ensemble de définition : si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, écrire l'asymptote verticale d'équation $x = x_0$.
2. **En $+\infty$ ou en $-\infty$** : si $f(x)$ tend vers un réel b, asymptote horizontale d'équation $y = b$.
3. **Si $f(x)$ tend vers l'infini** : chercher la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Infinie : direction l'axe des ordonnées. Nulle : direction l'axe des abscisses. Réelle a non nulle : étudier $f(x) - ax$.
4. **Si $f(x) - ax$ tend vers un réel b** : asymptote oblique $y = ax + b$. Si $f(x) - ax$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$: branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

À toi : Une asymptote oblique

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x + 1}$ sur $]-1; +\infty[$. Montre que la courbe de f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, et donne son équation. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Commence par la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

Indice 2

Réduis $f(x) - ax$ au même dénominateur, puis cherche sa limite.

Indice 3

Point délicat : la première limite donne seulement le coefficient directeur ; c'est la seconde qui prouve l'asymptote.

Réponse

Coefficient directeur. Pour $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x - 3}{x + 1} = \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

D'après la limite d'un quotient, ce quotient tend vers 2 en $+\infty$.

Écart. Pour $x > -1$:

$$\begin{aligned} & f(x) - 2x \\ &= \frac{2x^2 - 3x - 2x^2 - 2x}{x + 1} \\ &= \frac{-5x}{x + 1}, \end{aligned}$$

qui tend vers -5 en $+\infty$.

Conclusion. D'après la recherche d'une asymptote oblique, la droite d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

Position relative et résolution graphique

Au-dessus ou au-dessous

Devine : Le coût moyen et son asymptote

On étudie la fonction $q \mapsto q + 4 + \dfrac{64}{q}$, expression du coût moyen, sur $]0;+\infty[$. Sa courbe a pour asymptote la droite d'équation $y = q + 4$. Pour $q > 0$, où se trouve la courbe par rapport à cette droite ?

A. Au-dessous de la droite.

Faux.
L'écart $\dfrac{64}{q}$ est positif.

B. Elle la coupe en $q = 8$.

Faux.
En 8, l'écart vaut 8 : pas de point commun.

C. Au-dessus de la droite.

Juste.
Juste : l'écart $\dfrac{64}{q}$ est strictement positif.

D. Au-dessus seulement pour $q > 8$.

Faux.
L'écart est positif pour tout $q > 0$; 8 ne joue aucun rôle ici.

Correction

Pour tout $q > 0$, l'écart vaut $C_M(q) - (q + 4) = \dfrac{64}{q}$. Il est strictement positif : la courbe est strictement au-dessus de son asymptote.

L'écart tend vers 0 en $+\infty$, sans jamais s'annuler.

Définition : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et (D) la droite d'équation $y = ax + b$. On dit que $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I lorsque $f(x) - (ax + b) \geq 0$ pour tout x de I, et **au-dessous** de (D) sur I lorsque $f(x) - (ax + b) \leq 0$ pour tout x de I. Les points communs à $\mathcal{C}_f$ et à (D) ont pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = ax + b$.

De même, la position de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se lit sur le signe de $f(x) - g(x)$.

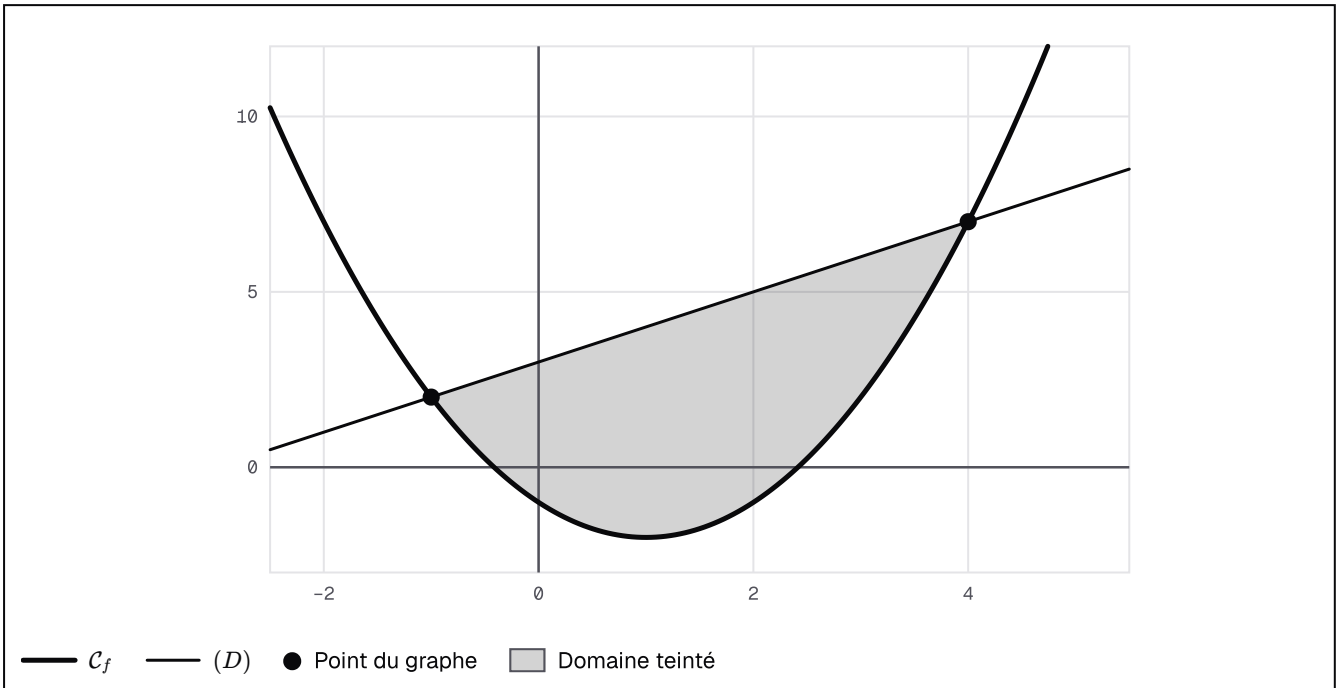
Exemple : une parabole et une droite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$, et (D) la droite d'équation $y = x + 3$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - (x+3) &= x^2 - 3x - 4 \\ &= (x+1)(x-4). \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x) - (x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La courbe est au-dessus de (D) sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[4 ; +\infty[$, au-dessous sur $[-1 ; 4]$. Les points communs sont $(-1 ; 2)$ et $(4 ; 7)$.



La parabole de f et la droite (D) d'équation y = x + 3 se coupent aux points d'abscisses −1 et 4. La partie teintée, entre ces abscisses, est la zone où la courbe passe sous la droite.

Méthode : position d'une courbe et d'une droite

1. **Former** la différence $f(x) - (ax + b)$ et la simplifier.
2. **Étudier** son signe dans un tableau de signes.
3. **Conclure** : la courbe est au-dessus de la droite là où la différence est positive, au-dessous là où elle est négative. Les points communs ont pour abscisses les solutions de $f(x) = ax + b$.

Résoudre graphiquement

En clair. Une équation $f(x) = g(x)$ se lit sur un dessin : ses solutions sont les abscisses des points communs aux deux courbes.

Une inéquation $f(x) \leq g(x)$ se lit aussi : on garde les abscisses où la courbe de f est au-dessous de celle de g, ou la touche.

Vérifie : Lire une inéquation

Reprends la parabole d'équation $y = x^2 - 2x - 1$ et la droite (D) d'équation $y = x + 3$ de l'exemple. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 1 \leq x + 3$?

A. $]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$

Faux.

C'est là que la parabole est au-dessus de la droite.

B. $\{-1; 4\}$

Faux.

Ce sont les solutions de l'équation seulement.

C. $]-1; 4[$

Faux.

Les bornes conviennent : en -1 et en 4, il y a égalité.

D. $[-1; 4]$

Juste.

Juste : la parabole y est au-dessous de la droite, ou la touche.

Correction

On cherche les abscisses où la parabole est au-dessous de (D), ou sur (D). D'après le tableau de signes de $(x + 1)(x - 4)$, la différence est négative ou nulle sur $[-1; 4]$. L'ensemble des solutions est $[-1; 4]$.

Méthode : résoudre graphiquement

1. **Lire ou tracer** les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, ou une courbe et une droite.
2. **Équation** $f(x) = g(x)$: relever les abscisses des points d'intersection.
3. **Inéquation** $f(x) \leq g(x)$: relever les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de $\mathcal{C}_g$, ou sur elle.
4. **Signe de** f : $f(x) \geq 0$ là où la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, ou sur lui.

Attention : une lecture graphique est approchée

✗ « Sur le dessin, la parabole d'équation $y = x^2$ coupe la droite d'équation $y = 2$ en $x = 1{,}4$: la solution positive de $x^2 = 2$ est donc $1{,}4$. »

✓ Une lecture graphique donne une valeur **approchée** : la solution exacte est $\sqrt{2}$, et $1{,}4^2 = 1{,}96 \neq 2$. On écrit $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

Quand l'énoncé demande une valeur exacte, on la calcule.

À toi, puis la rédaction

À toi : Quand l'entreprise est-elle rentable ?

Une entreprise fictive vend q centaines de bouilloires électriques, avec $q \in [0; 12]$. Sa recette vaut $R(q) = 12q$ et son coût $H(q) = q^2 + 2q + 16$, en milliers de dirhams. Pour quelles valeurs de q la droite de recette est-elle au-dessus de la courbe de coût, ou la touche ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Forme la différence $R(q) - H(q)$ et réduis-la.
Indice 2
Mets -1 en facteur, puis factorise le trinôme obtenu à l'aide de ses racines.
Indice 3
Point délicat : le signe moins devant le produit inverse le tableau de signes ; garde les bornes, où recette et coût sont égaux.

Réponse
Pour tout q de $[0; 12]$:

$$\begin{aligned} & R(q) - H(q) \\ & = 12q - q^2 - 2q - 16 \\ & = -(q - 2)(q - 8). \end{aligned}$$

Le produit $(q - 2)(q - 8)$ est négatif ou nul sur $[2; 8]$, donc $R(q) - H(q) \geq 0$ sur $[2; 8]$. Ailleurs, le produit est strictement positif et la différence strictement négative.

Conclusion. La droite de recette est au-dessus de la courbe de coût, ou la touche, pour $q \in [2; 8]$: l'entreprise ne perd pas d'argent entre 200 et 800 bouilloires.

Remarque : Coin examen : rédiger une position relative

À l'examen, on écrit la différence, son signe, puis la conclusion. Par exemple : « Pour tout réel x, $f(x) - (x + 3) = (x + 1)(x - 4)$. D'après le tableau de signes, cette différence est négative sur $[-1; 4]$ et positive ailleurs. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D) sur $[-1; 4]$, et au-dessus de (D) sur $]-\infty; -1]$ et sur $[4; +\infty[$. »

Plan d'étude d'une fonction

Le plan d'étude

Devine : Par où commencer ?

On veut étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x+1}$ et tracer sa courbe. Quelle est la première étape ?

A. Déterminer son ensemble de définition.

Juste.

Juste : en -1, le dénominateur s'annule ; tout le reste en dépend.

B. Dresser un tableau de valeurs à la calculatrice.

Faux.

Un tableau de valeurs ne donne ni les limites ni les variations exactes.

C. Calculer la dérivée seconde.

Faux.

Elle vient après la dérivée, et seulement si elle est demandée.

D. Tracer la courbe à main levée.

Faux.

Le tracé vient en dernier : il résume l'étude.

Correction

On commence par l'ensemble de définition : $x+1 \neq 0$, donc $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

Les limites, la dérivée et le tracé se font ensuite sur chacun de ces intervalles.

Méthode : le plan d'étude d'une fonction

1. **Ensemble de définition** ; le réduire s'il y a un élément de symétrie.
2. **Limites** aux bornes et **branches infinies**.
3. **Dérivée**, signe de la dérivée et **tableau de variations**.
4. **Dérivée seconde**, si elle est demandée : concavité et points d'inflexion.
5. **Points particuliers** : intersections avec les axes, tangentes, position par rapport à une asymptote.
6. **Tracer** : asymptotes et tangentes d'abord, puis la courbe, fidèle au tableau de variations.

Exemple : Étude, étape 1 : limites et asymptote verticale

Pour $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x+1}$, sur $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$:

- **En -1.** Le numérateur tend vers 4. Le dénominateur tend vers 0, positif à droite, négatif à gauche. Donc $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.
- **À l'infini.** Pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $f(x) = x \times \dfrac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$. Le quotient tend vers 1, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ (limite d'un produit).

Dérivée et variations

Exemple : Étude, étape 2 : dérivée et tableau de variations

D'après la formule du quotient, pour tout $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $(x-1)(x+3)$.

Comme $f'(x) > 0$ sur $]-\infty ; -3[$ et sur $]1 ; +\infty[$, f y est croissante ; comme $f'(x) < 0$ sur $]-3 ; -1[$ et sur $]-1 ; 1[$, elle y est décroissante. On a $f(-3) = -6$ et $f(1) = 2$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Vérifie : Lire le tableau

D'après ce tableau, quelle affirmation est juste ?

A. $f(-3) = -6$ est un minimum local.
Faux.
Autour de -3, f monte puis descend : c'est un maximum local.

B. $f(1) = 2$ est un maximum local.
Faux.
Autour de 1, f descend puis monte : c'est un minimum local.

C. $f(1) = 2$ est un minimum local.
Juste.
Juste : f' s'annule en 1 en passant du signe moins au signe plus.

D. -6 est le minimum de f sur D_f.

Faux.

$f(x)$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$: f n'a pas de minimum sur D_f.

Correction

En 1, f' s'annule en changeant de signe, du négatif au positif : d'après l'énoncé sur le changement de signe de la dérivée, $f(1) = 2$ est un minimum local. De même, $f(-3) = -6$ est un maximum local.

Sur $]-1;+\infty[$, 2 est même le minimum de f.

Le signe lu sur le tableau

Pourquoi est-ce vrai ? Un cas chiffré d'abord : si la plus petite valeur de f sur I vaut 3, alors $f(x) \geq 3 > 0$ pour tout x de I.

En général, si la plus petite valeur de f sur un intervalle est strictement positive, toutes ses valeurs, qui sont plus grandes, le sont aussi. Le tableau de variations donne alors le signe de f sans autre calcul.

Propriété : Signe d'une fonction et tableau de variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si f admet sur I un minimum m strictement positif, alors $f(x) > 0$ pour tout x de I. Si f admet sur I un maximum M strictement négatif, alors $f(x) < 0$ pour tout x de I.
- Si f est strictement croissante sur I et si $f(\beta) = 0$ pour un réel β de I, alors $f(x) < 0$ pour tout x de I tel que $x < \beta$, et $f(x) > 0$ pour tout x de I tel que $x > \beta$. Si f est strictement décroissante, les signes sont échangés.

Démonstration

Étape 1. Par définition du minimum, $f(x) \geq m$ pour tout x de I. Comme $m > 0$, on obtient $f(x) > 0$ par transitivité de l'ordre. Le cas d'un maximum strictement négatif se traite de même.

Étape 2. Supposons f strictement croissante sur I et $f(\beta) = 0$. Si $x < \beta$, la définition d'une fonction strictement croissante donne $f(x) < f(\beta)$, c'est-à-dire $f(x) < 0$. Si $x > \beta$, elle donne $f(x) > f(\beta) = 0$.

Étape 3. Si f est strictement décroissante, les inégalités entre $f(x)$ et $f(\beta)$ changent de sens : $f(x) > 0$ pour $x < \beta$ et $f(x) < 0$ pour $x > \beta$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout repose sur des **définitions** et sur la **transitivité** de l'ordre : si $u \geq v$ et $v > 0$, alors $u > 0$. Pour un minimum : $f(x) \geq m$ et $m > 0$ donnent $f(x) > 0$. Pour une fonction strictement croissante : $x < \beta$ donne $f(x) < f(\beta) = 0$. Aucune dérivée n'intervient dans la preuve.

Vérifie : Une étape de la preuve

f est strictement croissante sur I et $f(\beta) = 0$. Dans la preuve, d'où vient $f(x) < 0$ pour $x < \beta$?

A. De la définition de la stricte croissance.

Juste.

Juste : $x < \beta$ donne $f(x) < f(\beta)$, c'est-à-dire $f(x) < 0$.

B. Du signe de la dérivée de f sur I.

Faux.

La preuve n'utilise aucune dérivée : f n'est même pas supposée dérivable.

C. Du fait que $f(\beta)$ est un minimum de f.

Faux.

$f(\beta)$ n'est pas un minimum : f prend des valeurs plus petites avant β.

D. De la continuité de f au point β.

Faux.

La continuité ne compare pas $f(x)$ et $f(\beta)$.

Correction

Par définition, f strictement croissante sur I signifie : pour x et x' de I, $x < x'$ entraîne $f(x) < f(x')$. Avec $x' = \beta$: $x < \beta$ entraîne $f(x) < f(\beta) = 0$.

Exemple : le signe de f lu sur le tableau

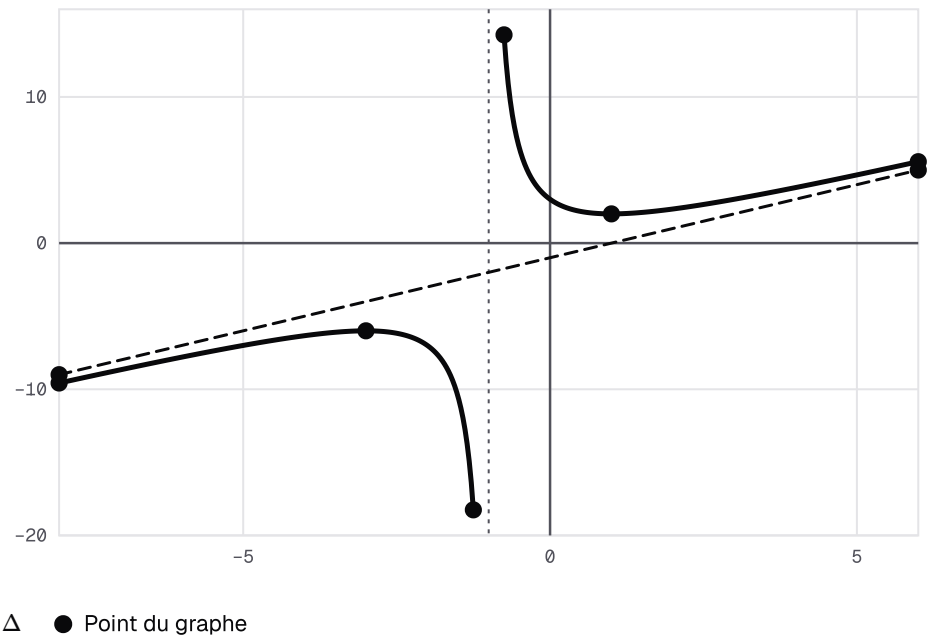
- Sur $]-1; +\infty[$, f admet le minimum $f(1) = 2$, strictement positif. Donc $f(x) > 0$ pour tout $x > -1$.
- Sur $]-\infty; -1[$, f admet le maximum $f(-3) = -6$, strictement négatif. Donc $f(x) < 0$ pour tout $x < -1$.
- **L'hypothèse compte.** Pour $x \mapsto (x-1)^2$, le minimum sur $\mathbb{R}$ vaut 0 : il n'est pas strictement positif. On conclut seulement $(x-1)^2 \geq 0$, et la fonction s'annule en 1.

Asymptote oblique et tracé

Exemple : Étude, étape 3 : asymptote oblique et position

Pour tout $x \neq -1$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x+1}$: en effet, $(x-1)(x+1) + 4 = x^2 + 3$.

- L'écart $f(x) - (x-1) = \dfrac{4}{x+1}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$: la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique.
- L'écart est strictement positif sur $]-1; +\infty[$: la courbe est au-dessus de (Δ). Il est strictement négatif sur $]-\infty; -1[$: elle est au-dessous.



La courbe de f et ses deux asymptotes

À toi : Une étude guidée

Soit $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-2}$ sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$. On donne $g'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. Dresse le tableau de variations de g, puis déduis-en le signe de g sur $]2; +\infty[$ et sur $]-\infty; 2[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Étudie le signe de $x(x-4)$; le dénominateur est strictement positif.
Indice 2
Calcule g aux deux réels où g' s'annule.
Indice 3
Point délicat : relis la condition de la propriété sur le signe du maximum ; compare-le à 0 avec soin.

Réponse
Pour tout $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$: le signe de $g'(x)$ est celui de $x(x-4)$.

Variations. Comme $g'(x) > 0$ sur $]-\infty; 0[$, g est croissante sur $]-\infty; 0]$. Comme $g'(x) < 0$ sur $]0; 2[$ et sur $]2; 4[$, elle est décroissante sur $[0; 2[$ et sur $]2; 4]$. Comme $g'(x) > 0$ sur $]4; +\infty[$, elle est croissante sur $[4; +\infty[$.

Signe.

- Sur $]2;+\infty[$, le minimum est $g(4)=8$, strictement positif : donc $g(x)>0$.
- Sur $]-\infty;2[$, le maximum est $g(0)=0$: donc $g(x)\leq 0$, avec égalité seulement en 0. Ce maximum n'est pas strictement négatif : on ne peut pas conclure $g(x)<0$ partout.

Synthèse

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Un nombre dérivé** : la limite du taux de variation ; il donne la pente de la tangente et estime le coût d'une unité de plus.
- **Une dérivée** : reconnaître la forme (somme, produit, quotient, puissance, composée, racine), puis factoriser.
- **Des variations** : le signe de la dérivée, sur chaque intervalle.
- **Un extremum** : la dérivée s'annule en changeant de signe.
- **Une optimisation** : variable, intervalle, fonction, tableau, puis une phrase de réponse avec l'unité.
- **La concavité** : le signe de la dérivée seconde.
- **Une asymptote oblique** : $\dfrac{f(x)}{x}$ donne a, puis $f(x)-ax$ donne b.
- **Une position relative** : le signe d'une différence.

Le mot du prof. Tu sais maintenant étudier une fonction de bout en bout et tracer sa courbe. Ce travail sert aussi en économie : prévoir un coût, trouver le meilleur bénéfice, le coût moyen le plus bas. Dans les chapitres suivants, les mêmes gestes serviront pour de nouvelles fonctions.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Dérivation et étude de fonctions » (2bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)