BURHAN

# Résumé : Continuité

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/continuite/resume

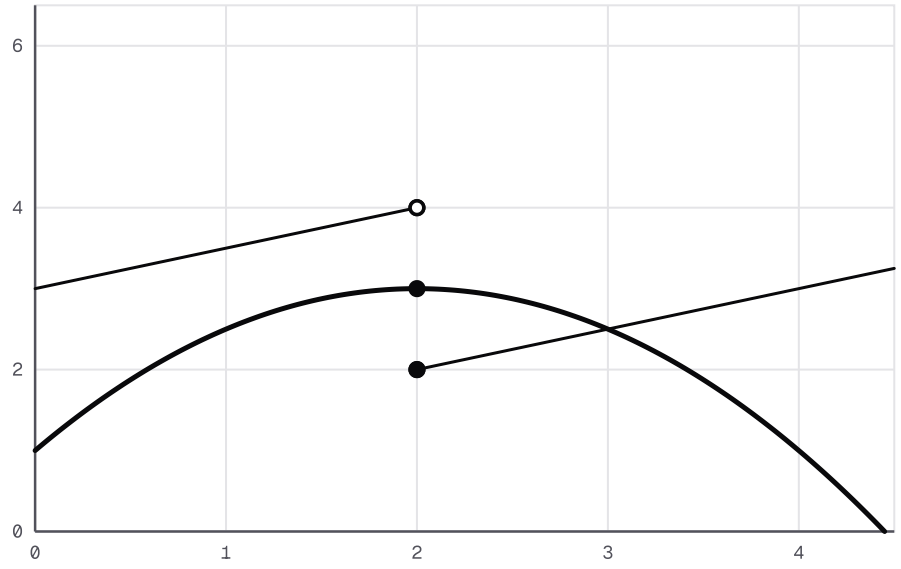
| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Continuité | Semestre 1 |

## Continuité en un point ; à droite, à gauche

**À retenir : Une courbe sans saut**

Une fonction est continue en un point quand sa courbe y passe sans saut ni trou. Pense à un tarif qui change brutalement à partir d'une certaine quantité : sa courbe fait un saut.

Le calcul remplace le dessin : tu compares la limite et l'image.




$\mathcal{C}_f$ $\mathcal{C}_g$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

**Au point d'abscisse 2, la courbe de f passe sans interruption, tandis que celle de g change brusquement de hauteur : la limite à gauche de g n'est pas sa valeur.**

Borne exclue en x = 2 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 4.

Point creux en x = 2, à l'ordonnée estimée ≈ 4 : limite à gauche estimée numériquement.

**Définition : Continuité en un point**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel $a$. On dit que $f$ est **continue en** $a$ lorsque $f$ admet en $a$ une limite finie égale à $f(a)$ :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Lorsque cette égalité n'a pas lieu (la limite n'existe pas, ou elle est différente de $f(a)$), on dit que $f$ est **discontinue** en $a$.

**Définition : Continuité à droite, continuité à gauche**

Soit $f$ une fonction et $a$ un réel.

- Si $f$ est définie sur un intervalle $[a; a+h[$, avec $h > 0$, on dit que $f$ est **continue à droite en** $a$ lorsque $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Si $f$ est définie sur un intervalle $]a-h; a]$, avec $h > 0$, on dit que $f$ est **continue à gauche en** $a$ lorsque $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

**Propriété : Continuité et continuité à droite et à gauche**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel $a$. La fonction $f$ est continue en $a$ si et seulement si elle est **à la fois** continue à droite et continue à gauche en $a$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a^+} f(x) &= \lim_{x \to a^-} f(x) \\ &= f(a).\end{aligned}$$

**Remarque : Résultat admis**

La propriété des deux côtés est admise dans ce chapitre. Tu l'utilises sans la démontrer.

**Méthode : continuité en un point d'une fonction par morceaux**

1. **Repère** le réel $a$ où l'expression change. Calcule $f(a)$ avec l'expression qui contient $a$.
2. **Calcule** la limite à gauche avec l'expression valable pour $x < a$, puis la limite à droite avec celle valable pour $x > a$.
3. **Compare** ces trois nombres. S'ils sont égaux, $f$ est continue en $a$. Sinon, elle ne l'est pas : précise le côté qui pose problème.

**Exemple**

**Énoncé.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Étudie la continuité de $f$ en $2$.

**Image.** Avec la seconde ligne, $f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$.

**Limite à gauche.** Avec la première ligne, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 - 3 = 1$.

**Limite à droite.** Avec la seconde ligne, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \times 2 - 3 = 1$.

**Conclusion.** Les deux limites valent $f(2)$. D'après la propriété des deux côtés, $f$ est continue en $2$.

**Attention : Limite et image : deux nombres à comparer**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(1) = 4$ et $g(x) = 3x - 2$ pour $x \neq 1$.

Quand $x$ se rapproche de $1$, $g(x)$ se rapproche de $1$. Or $g(1) = 4$. La limite existe, mais elle n'est pas égale à l'image : $g$ n'est pas continue en $1$.

## Prolongement par continuité

**À retenir : Boucher un trou**

Une fonction peut ne pas être définie en un point, alors que sa courbe s'approche d'un point précis. On bouche ce trou en ajoutant la valeur manquante. Cette valeur est la limite.

**Définition : Prolongement par continuité**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel $a$, **sauf en** $a$, et qui admet en $a$ une limite finie $\ell$. La fonction $g$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en $a$. On l'appelle le **prolongement par continuité** de $f$ en $a$.

**Méthode : prolonger par continuité**

1. **Vérifie** que $f$ n'est pas définie en $a$, mais qu'elle l'est autour de $a$.
2. **Calcule** $\lim_{x \to a} f(x)$. Devant la forme $\frac{0}{0}$, fais apparaître le facteur $x - a$ en haut et en bas, puis simplifie-le.
3. **Conclus.** Lorsque la limite vaut un réel $\ell$, le prolongement prend la valeur $\ell$ en $a$ et coïncide avec $f$ ailleurs. Si la limite est infinie, ou si elle n'existe pas, $f$ n'a pas de prolongement par continuité en $a$.

**Exemple**

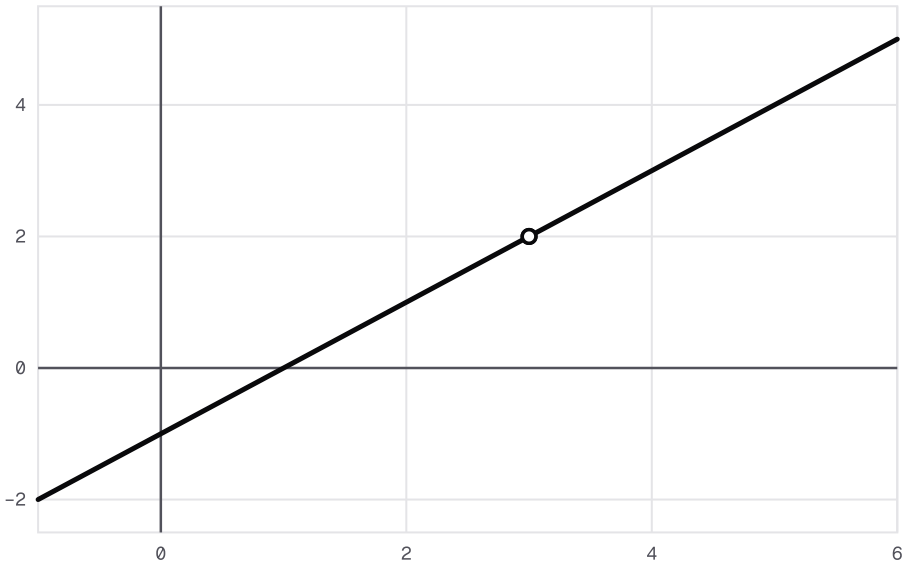
**Énoncé.** Soit $f$ la fonction définie pour $x \neq 3$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.

**Factorisation.** $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. Pour $x \neq 3$, on simplifie par $x - 3$ : $f(x) = x - 1$.

**Limite.** $\lim_{x \to 3} f(x) = 3 - 1 = 2$.

**Conclusion.** Le prolongement par continuité de $f$ en $3$ est la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$




$\mathcal{C}_f$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

**Pour x ≠ 3, f(x) = x – 1 : la courbe de f est une droite trouée au point (3 ; 2). Le prolongement g remplit ce trou avec la valeur 2.**

Point creux en x = 3, à l'ordonnée estimée ≈ 2 : ce point n'appartient pas à la courbe.

Point creux en x = 3, à l'ordonnée estimée ≈ 2 : limite à gauche estimée numériquement.

**Remarque : Limite infinie : pas de prolongement**

Prends la fonction $h$ définie pour $x \neq 3$ par $h(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$.

Près de $3$, le dénominateur est positif et proche de $0$ : $\lim_{x \to 3} h(x) = +\infty$. Aucune valeur ne bouche ce trou. Donc $h$ n'a pas de prolongement par continuité en $3$.

## Continuité sur un intervalle ; opérations et composée

**À retenir : Sans lever le crayon**

Sur un intervalle, une fonction continue se trace d'un seul geste. En pratique, tu ne refais pas de calcul de limite. Tu reconnais des fonctions usuelles, puis tu nommes l'opération qui les assemble.

**Définition : Continuité sur un intervalle**

- Une fonction $f$ est **continue sur un intervalle ouvert** $]a;b[$ lorsqu'elle est continue en tout réel de cet intervalle.
- Elle est **continue sur le segment** $[a;b]$ lorsqu'elle est continue sur $]a;b[$, continue à droite en $a$ et continue à gauche en $b$.

On définit de même la continuité sur $[a;b[$, sur $]a;b]$ et sur les intervalles non bornés, comme $[a;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. La courbe d'une fonction continue sur un intervalle se trace sans lever le crayon.

**Propriété : Continuité des fonctions usuelles**

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est continue sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Propriété : Opérations sur les fonctions continues**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$, et $k$ un réel.

- Les fonctions $f+g$, $kf$ et $fg$ sont continues sur $I$ ; pour tout entier naturel non nul $n$, la fonction $f^n$ est continue sur $I$.
- Si $g$ ne s'annule pas sur $I$, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur $I$.
- Si $f$ est positive sur $I$, la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur $I$.

**Propriété : Continuité d'une composée**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $g$ une fonction continue sur un intervalle $J$. Si, pour tout $x$ de $I$, $f(x)$ appartient à $J$ (on écrit $f(I) \subset J$), alors la fonction composée $g \circ f$, définie sur $I$ par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$, est continue sur $I$.

**Remarque : Résultats admis**

Ces trois résultats sont admis dans ce chapitre : la continuité des fonctions usuelles, celle obtenue par les opérations et celle d'une composée. Tu les utilises sans les démontrer.

**Méthode : justifier la continuité sur un intervalle**

1. **Décompose** l'expression en morceaux simples, assemblés par somme, produit, quotient ou composée.
2. **Rappelle** la continuité de chaque morceau : un polynôme sur $\mathbb{R}$, la racine carrée sur $[0;+\infty[$, la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.
3. **Vérifie** la condition de l'opération sur l'intervalle : un dénominateur jamais nul, une quantité positive sous la racine, l'inclusion $u(I) \subset J$ pour une composée $v \circ u$.

Exemple

**Énoncé.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$.

**Dénominateur.** $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ s'annule pour $x = -2$ ou $x = 2$, et seulement pour ces deux valeurs.

**Conclusion.** Le numérateur et le dénominateur sont des polynômes, continus sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty;-2[$, ni sur $]-2;2[$, ni sur $]2;+\infty[$.

Par quotient, $f$ est continue sur chacun de ces trois intervalles.

Exemple

**Énoncé.** Soit $g$ la fonction définie sur $]-\infty;5]$ par $g(x) = \sqrt{5-x}$.

**Fonction intérieure.** $u : x \mapsto 5 - x$ est un polynôme, continu sur $]-\infty;5]$. Pour $x \leq 5$, on a $5 - x \geq 0$, donc $u(]-\infty;5]) \subset [0;+\infty[$.

**Conclusion.** La racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$. Par composée, $g$ est continue sur $]-\infty;5]$.

## Image d'un intervalle

> **À retenir : Toutes les valeurs prises**
>
> Imagine un bénéfice fictif, calculé pour une production entre $0$ et $50$ unités. L'image de cet intervalle est l'ensemble des bénéfices possibles. Pour une fonction continue, c'est encore un intervalle, sans valeur manquante.

Théorème **: Image d'un intervalle, d'un segment**

Soit $f$ une fonction **continue** sur un intervalle $I$.

- L'image $f(I)$ de l'intervalle $I$ par $f$ est un **intervalle**.
- En particulier, l'image d'un segment $[a;b]$ est un **segment** $[m;M]$, où $m$ est la plus petite et $M$ la plus grande des valeurs prises par $f$ sur $[a;b]$.

**Propriété : Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone**

Soit $f$ une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $I$, et $a$, $b$ deux réels de $I$ tels que $a < b$.

- Si $f$ est strictement croissante sur $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [f(a);f(b)]$.
- Si $f$ est strictement décroissante sur $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [f(b);f(a)]$.
- Plus généralement, les bornes de $f(I)$ sont les images ou les limites de $f$ aux bornes de $I$ : dans le même ordre si $f$ est strictement croissante, dans l'ordre inverse si elle est strictement décroissante. Une borne de $I$ incluse dans $I$ donne une borne incluse dans $f(I)$, une borne exclue donne une borne exclue.

Par exemple, si $f$ est strictement croissante sur $[a;+\infty[$, alors :

$$f([a;+\infty[) = \left[f(a);\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[.$$

**Remarque : Résultats admis**

Les deux théorèmes sur l'image d'un intervalle sont admis dans ce chapitre. Tu les utilises sans les démontrer.

**Méthode : déterminer l'image d'un intervalle**

1. **Justifie** la continuité de $f$ sur $I$.
2. **Étudie** le signe de $f'(x)$ sur $I$ et dresse le tableau de variations.
3. **Calcule** les images aux bornes incluses, et les limites aux bornes exclues ou infinies.
4. **Lis** l'image. Une fonction strictement croissante garde l'ordre des bornes ; une fonction strictement décroissante les échange. Si $f$ change de sens, réunis les images de chaque morceau.

**Exemple**

**Énoncé.** Détermine l'image de $[-1;1]$ par la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$.

**Variations.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Sur $]-1;1[$, $f'(x) < 0$ : $f$ est strictement décroissante sur $[-1;1]$.

**Bornes.** $f(-1) = -1 + 3 = 2$ et $f(1) = 1 - 3 = -2$.

**Conclusion.** $f$ est continue, car c'est un polynôme. Les bornes s'échangent, donc $f([-1;1]) = [-2;2]$.

**Exemple**

**Énoncé.** Détermine l'image de $]0;+\infty[$ par la fonction $g : x \mapsto 3 - \dfrac{1}{x}$.

**Continuité.** $g$ est une fonction rationnelle, définie pour $x \neq 0$ : elle est continue sur $]0;+\infty[$.

**Variations.** Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ : $g$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

**Limites.** $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 3$.

**Conclusion.** Les deux bornes sont exclues : $g(]0;+\infty[) = ]-\infty;3[$. La valeur $3$ n'est jamais atteinte.

**Attention : Sans monotonie, cherche le minimum et le maximum**

Soit $h$ la fonction définie sur $[0;3]$ par $h(x) = x^2 - 2x$. On trouve $h(0) = 0$ et $h(3) = 3$.

Conclure que l'image est $[0;3]$ est faux, car $h(1) = -1$. La fonction décroît sur $[0;1]$, puis croît sur $[1;3]$. Donc $h([0;3]) = [-1;3]$.

**Attention : Fonction décroissante : bornes échangées**

Soit $k$ la fonction définie sur $[1;2]$ par $k(x) = 4 - x^2$. Comme $k'(x) = -2x < 0$ sur $[1;2]$, $k$ est strictement décroissante. On a $k(1) = 3$ et $k(2) = 0$.

L'image s'écrit $[0;3]$ : la plus petite valeur d'abord, même si elle vient de la borne de droite.

## Théorème des valeurs intermédiaires

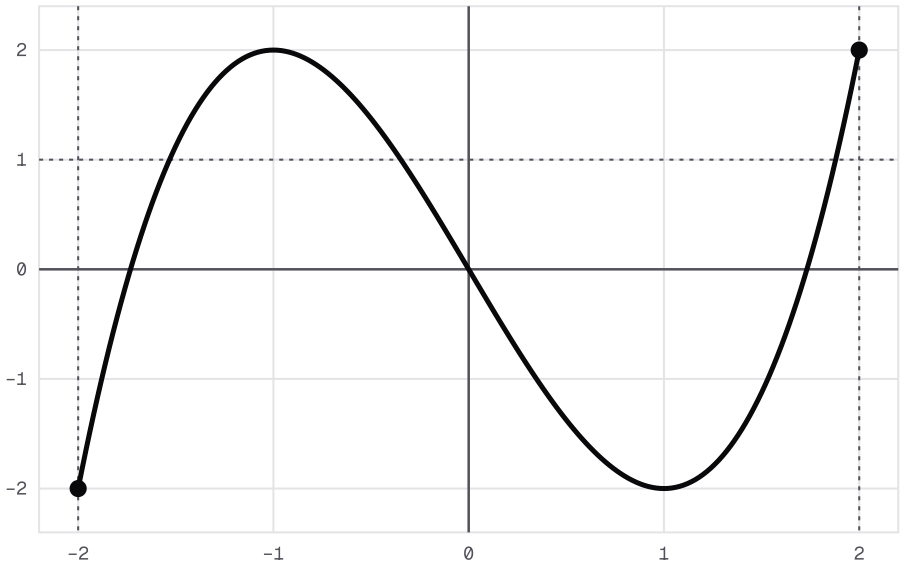
**À retenir : De la perte au gain**

Un bénéfice fictif passe d'une perte à un gain quand la production augmente. S'il varie sans saut, il s'annule au moins une fois entre les deux. Le théorème des valeurs intermédiaires dit exactement cela.

**Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit $f$ une fonction **continue sur le segment** $[a;b]$. Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** réel $c$ de $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.




Courbe de f ------ Droite y = 1, et verticales x = a, x = b

**Le théorème illustré : f est continue sur [−2 ; 2], le niveau k = 1 est entre f(−2) = −2 et f(2) = 2, et la courbe atteint ce niveau ici trois fois. Le théorème n'en garantit qu'une.**

a = −2, b = 2, k = 1.

f(a) ≈ −2 et f(b) ≈ 2.

### Propriété : Cas où f(a) et f(b) sont de signes contraires

Soit $f$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Si $f(a)\times f(b)<0$, c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a;b[$.

### Méthode : prouver qu'une équation a au moins une solution

1. **Ramène** l'équation à la forme $f(x)=k$. Choisis un segment $[a;b]$ adapté, par exemple avec un tableau de valeurs.
2. **Justifie** la continuité de $f$ sur tout le segment.
3. **Calcule** $f(a)$ et $f(b)$, puis vérifie que $k$ est compris entre eux. Pour $k=0$, il suffit que $f(a)\times f(b)<0$ .
4. **Rédige** la conclusion en nommant le théorème des valeurs intermédiaires.

### Exemple

**Énoncé.** Montre que l'équation $x^3+2x=7$ a au moins une solution dans $[1;2]$.

**Continuité.** La fonction $f:x\mapsto x^3+2x$ est un polynôme, continu sur $[1;2]$.

**Bornes.** $f(1)=3$ et $f(2)=12$. Le réel $7$ est compris entre $3$ et $12$.

**Conclusion.** D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 7$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.

**Attention : Le théorème ne compte pas les solutions**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0; 4]$ par $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Elle est continue, et $g(0) = -6$ et $g(4) = 6$ : l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution.

En fait, elle en a trois : $1$, $2$ et $3$. Pour affirmer qu'il n'y en a qu'une, il faut la stricte monotonie.

**Attention : Un saut casse le théorème**

Soit $h$ la fonction définie sur $[0; 2]$ par :

$$h(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On a $h(0) = -2$ et $h(2) = 3$. Pourtant $h$ ne s'annule jamais : $h(x) < -1$ pour $x < 1$, et $h(x) \geq 2$ pour $x \geq 1$.

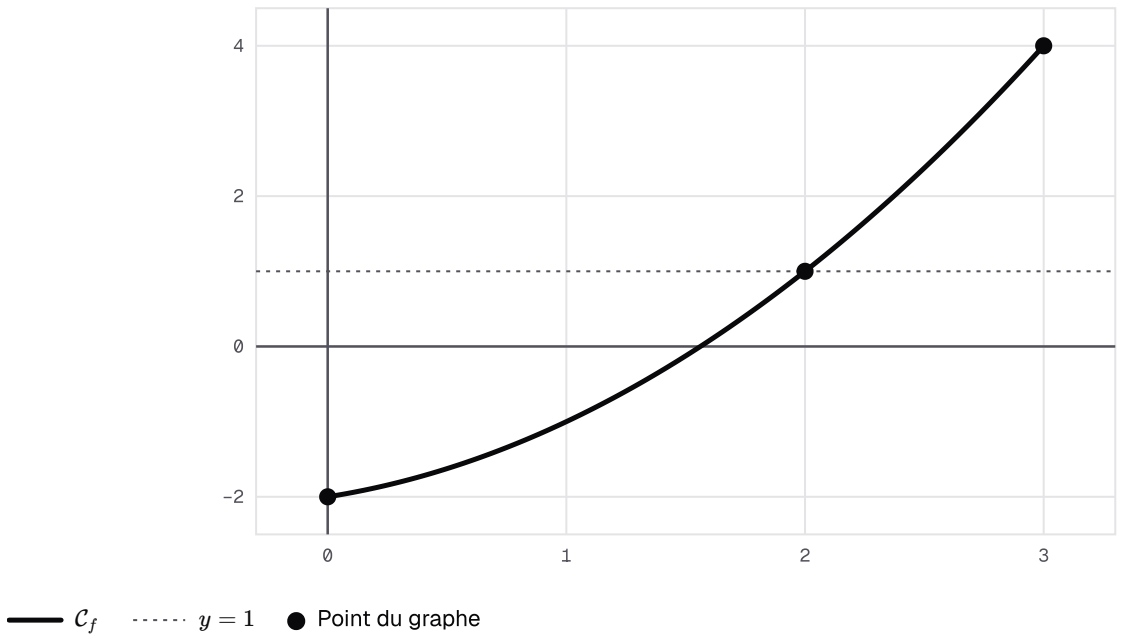
La fonction $h$ n'est pas continue en $1$ : le théorème ne s'applique pas.

### Unicité, encadrement et signe

**Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone**

Soit $f$ une fonction **continue et strictement monotone** sur le segment $[a; b]$.

- Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a; b]$.
- En particulier, si $f(a) \times f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a; b[$.
- Plus généralement, si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, pour tout réel $k$ de $f(I)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $I$.




**Cas strictement monotone : la courbe de f, continue et strictement croissante sur [0 ; 3], ne rencontre la droite d'équation y = 1 qu'en un point, d'abscisse 2.**

### Méthode : unicité d'une solution, puis encadrement

1. **Ajoute** la stricte monotonie : établis le signe de $f'$ sur $[a;b]$. Avec la continuité et les valeurs aux bornes, la solution $\alpha$ est unique.
2. **Encadre** $\alpha$ avec le tableau de valeurs de la calculatrice, au pas de $0{,}1$. Repère deux valeurs voisines $p$ et $q$ où $f(x) - k$ change de signe.
3. **Rédige.** Une solution existe dans $]p;q[$. Comme la solution est unique sur $[a;b]$, c'est $\alpha$ : $p < \alpha < q$.

### Exemple

**Énoncé.** Reprends $f : x \mapsto x^3 + 2x$ et l'équation $f(x) = 7$ sur $[1;2]$.

**Unicité.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ : $f$ est continue et strictement croissante sur $[1;2]$. Comme 7 est compris entre $f(1) = 3$ et $f(2) = 12$, la solution $\alpha$ est unique.

**Encadrement.** La calculatrice donne $f(1{,}5) = 6{,}375$ et $f(1{,}6) = 7{,}296$. La fonction $f$ est continue sur $[1{,}5;1{,}6]$ et 7 est compris entre ces deux images. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 7$ a une solution dans $]1{,}5;1{,}6[$.

**Conclusion.** Comme la solution est unique sur $[1;2]$, c'est $\alpha$ : $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

### Méthode : signe d'une fonction à l'aide de la solution

1. **Établis** que $g$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle, et que $g(\alpha) = 0$.

2. **Lis** le signe dans l'ordre. Si $g$ est strictement croissante, $g(x) < 0$ avant $\alpha$ et $g(x) > 0$ après. Si elle est strictement décroissante, c'est l'inverse.
3. **Range** ce signe dans un tableau : il sert ensuite à étudier une autre fonction.

**Exemple**

**Énoncé.** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 2x - 7$. Étudie le signe de $g(x)$.

**Monotonie.** $g$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme. Pour tout réel $x$, $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ : $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule en $\alpha$, la solution de l'exemple précédent, et seulement en $\alpha$.

**Signe.** Si $x < \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha) = 0$. Si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha) = 0$.

**Remarque : Calculatrice : une aide, pas une preuve**

La calculatrice aide à trouver l'encadrement. Elle ne le justifie pas seule : écris les deux images et leur signe.

Une valeur comme $\alpha \approx 1{,}57$ reste approchée. Garde la lettre $\alpha$ dans les calculs exacts.

## Fonction réciproque

**À retenir : Lire la fonction à l'envers**

Une demande fictive associe à chaque prix une quantité vendue. La question inverse est naturelle : quel prix pour vendre une quantité donnée ? Si la demande est continue et strictement monotone, chaque quantité correspond à un seul prix.

**Définition : Fonction réciproque**

Soit $f$ une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $I$, et $J = f(I)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone, pour tout réel $y$ de $J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x$ dans $I$ : on dit que $f$ est une **bijection** de $I$ sur $J$.

La fonction qui, à tout réel $y$ de $J$, associe cette solution $x$ est appelée **fonction réciproque** de $f$ ; on la note $f^{-1}$. Elle est définie sur $J$ et, pour tout $x$ de $I$ et tout $y$ de $J$ :

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Ainsi, pour tout $x$ de $I$, $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ et, pour tout $y$ de $J$, $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$.

**Propriété : Propriétés de la fonction réciproque**

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, et $f^{-1}$ sa fonction réciproque, définie sur $J = f(I)$.

- La fonction $f^{-1}$ est continue sur $J$.
- La fonction $f^{-1}$ est strictement monotone sur $J$, **de même sens de variation** que $f$.
- Dans un repère orthonormé, les courbes de $f$ et de $f^{-1}$ sont **symétriques par rapport à la droite d'équation** $y = x$.

**Remarque : Résultat admis**

La continuité de $f^{-1}$ sur $J$ est admise dans ce chapitre. Tu l'utilises sans la démontrer.

**Méthode : étudier une fonction réciproque**

1. **Établis** la continuité et la stricte monotonie de $f$ sur $I$ : $f^{-1}$ existe.
2. **Calcule** $J = f(I)$ avec la méthode de l'image d'un intervalle. C'est l'ensemble de définition de $f^{-1}$.
3. **Résous** $f(x) = y$ pour $y$ dans $J$, en gardant la solution qui appartient à $I$ : elle vaut $f^{-1}(y)$.
4. **Conclus.** $f^{-1}$ varie dans le même sens que $f$. Sa courbe est la symétrique de celle de $f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

**Exemple**

**Énoncé.** Soit $f$ la fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

**Existence.** Sur $I$, $x - 1 \geq 0$ : par composée, $f$ est continue sur $I$. Si $1 \leq x_1 < x_2$, alors $0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$. La racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc $f(x_1) < f(x_2)$ : $f$ est strictement croissante sur $I$.

**Image.** $f(1) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc $J = [0; +\infty[$.

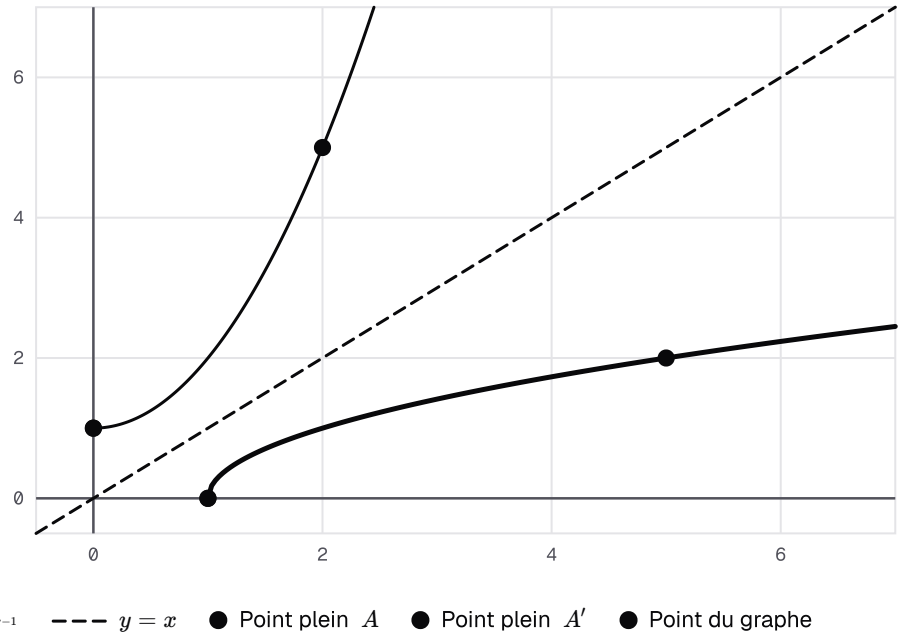
**Expression.** Pour $y \geq 0$ et $x \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{x - 1} = y &\Leftrightarrow x - 1 = y^2 \\ &\Leftrightarrow x = y^2 + 1. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $y \geq 0$, $f^{-1}(y) = y^2 + 1$.

**Remarque : Un point et son symétrique**

Avec cette fonction, $f(5) = 2$ : le point $(5; 2)$ est sur la courbe de $f$. Alors $f^{-1}(2) = 2^2 + 1 = 5$ : le point $(2; 5)$ est sur la courbe de $f^{-1}$. Ces deux points sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ .




**Les courbes de f : x ↦ √(x − 1) et de sa réciproque y ↦ y² + 1 sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x, comme les points (5 ; 2) et (2 ; 5).**

**Attention : La réciproque n'est pas l'inverse**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 6$. Sa réciproque vérifie $f^{-1}(x) = \dfrac{x+6}{3}$, alors que $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{3x-6}$.

En $3$ : $f^{-1}(3) = 3$, mais $\dfrac{1}{f(3)} = \dfrac{1}{3}$. Ici, l'exposant $-1$ désigne une fonction réciproque, jamais un quotient.

## Quelle méthode pour quelle question ?

**Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?**

- **Continuité en un point** : compare l'image et les limites à gauche et à droite.
- **Trou dans l'ensemble de définition** : calcule la limite ; si elle est finie, prolonge par continuité.
- **Continuité sur un intervalle** : fonctions usuelles, opérations, composée, conditions vérifiées.
- **Valeurs prises** : continuité, variations, puis images ou limites aux bornes.
- **Au moins une solution** : continuité sur le segment, valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
- **Une seule solution** : en plus, la stricte monotonie.
- **Encadrer** $\alpha$ : deux images de signes contraires, au pas demandé.
- **Signe** : place $x$ par rapport à $\alpha$ et utilise le sens de variation.
- **Réciproque** : continuité, stricte monotonie, $J = f(I)$, puis résolution de $f(x) = y$.

**Continuité en a**

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

**À droite et à gauche**

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

**Composée**

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

**f continue et strictement croissante sur [a ; b]**

$$f([a;b]) = [f(a); f(b)]$$

**f continue et strictement décroissante sur [a ; b]**

$$f([a;b]) = [f(b); f(a)]$$

**Signes contraires aux bornes**

$$f(a) \times f(b) < 0$$

**Réciproque, x dans I et y dans J**

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

**À retenir : Coin examen**

Au niveau examen, une question type demande l'existence et l'unicité de $\alpha$, puis un encadrement. Écris trois phrases :

- $f$ est continue sur $[a;b]$ ;
- $f$ est strictement monotone sur $[a;b]$ ;
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Cite ensuite le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone. Chaque hypothèse nommée rapporte des points.