BURHAN

Continuité : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/continuite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Niveau examen	5

Exercice 1 — 4 pts

Le signe d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

On admet que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

1. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = 6x(x-1)$, puis dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : dérive terme à terme, puis factorise par $6x$.

Ensuite : calcule $g(0)$ et $g(1)$.

2. — 0,5 pts

Montrer que $g(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty ; 1]$.

INDICE

Outil : lis le tableau : quelle est la plus grande valeur de g sur $]-\infty ; 1]$?

3. — 1,5 pts

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1 ; 2]$, puis que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.

INDICE

Outil : continuité et stricte monotonie de g sur $[1 ; 2]$, puis signes de $g(1)$ et $g(2)$.

Ensuite : calcule $g(1{,}6)$ et $g(1{,}7)$.

4. — 1 pts

En déduire que $g(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty ; \alpha[$ et $g(x) > 0$ pour tout x de $]\alpha ; +\infty[$.

INDICE

Début : traite séparément $x \leq 1$, puis $x \geq 1$.

Point délicat : sur $[1 ; +\infty[$, utilise la stricte croissance de g et $g(\alpha) = 0$.

Exercice 2 5 pts

Demande, offre et prix d'équilibre

Un commerçant étudie un produit dont le prix unitaire p, en dirhams, varie dans $[0;25]$. Pour un prix p, la quantité demandée par les clients et la quantité proposée par les fournisseurs, en centaines d'unités, sont :

$$d(p) = \frac{300}{p+5}$$

$$s(p) = 2p + 4$$

Le prix d'équilibre est le prix pour lequel la quantité demandée est égale à la quantité proposée. Ces données sont fictives.

1. 1 pts

Montrer que d est strictement décroissante sur $[0;25]$ et que $d([0;25]) = [10;60]$.

INDICE

Outil : $d'(p) = -\dfrac{300}{(p+5)^2}$.

Point délicat : fonction décroissante, bornes échangées.

2. 1,5 pts

Montrer que d admet une fonction réciproque d^{-1} définie sur $[10;60]$, et que $d^{-1}(q) = \dfrac{300}{q} - 5$ pour tout q de $[10;60]$. Calculer $d^{-1}(25)$ et interpréter ce nombre.

INDICE

Début : résous $\dfrac{300}{p+5} = q$, d'inconnue p.

Ensuite : $d^{-1}(25)$ est un prix.

3. 1 pts

On pose $h(p) = d(p) - s(p)$ pour p dans $[0;25]$. Montrer que h est strictement décroissante sur $[0;25]$.

INDICE

Outil : $h'(p) = d'(p) - 2$.

4. 1,5 pts

Montrer que l'équation $d(p) = s(p)$ admet une unique solution p_e dans $[0;25]$, puis que $8 < p_e < 9$.

INDICE

Début : $d(p) = s(p)$ équivaut à $h(p) = 0$; calcule $h(0)$ et $h(25)$.

Ensuite : calcule $h(8)$ et $h(9)$ à la calculatrice.

Exercice 3 — 5 pts

Un quotient avec une racine carrée

Soit $D = [-1;3[\cup]3;+\infty[$ et f la fonction définie sur D par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

1. — 1 pts

Montrer que f est continue sur $[-1;3[$ et sur $]3;+\infty[$.

INDICE

Outil : le numérateur contient une composée avec la racine carrée.

Point délicat : le dénominateur ne s'annule qu'en 3.

2. — 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \geq -1$, $\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right) = x-3$. En déduire que, pour tout x de D, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$.

INDICE

Outil : $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, avec $a = \sqrt{x+1}$ et $b = 2$.

Ensuite : remplace $x-3$ par ce produit au dénominateur de $f(x)$.

3. — 1 pts

Montrer que f admet en 3 une limite finie, égale à $\dfrac{1}{4}$.

INDICE

Outil : utilise l'écriture de la question 2.

Point délicat : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ est continue en 3.

4. — 0,5 pts

En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 3, puis montrer que $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ pour tout x de $[-1;+\infty[$.

INDICE

Outil : la limite trouvée est un réel.

Ensuite : compare $g(3)$ avec la valeur en 3 de l'expression de la question 2.

5. 1,5 pts

Montrer que g est strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$ et que $g\left([-1;+\infty[\right)=]0;0{,}5]$ (on admet que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$).

INDICE

Outil : pour $-1\leq a<b$, compare $\sqrt{a+1}+2$ et $\sqrt{b+1}+2$, puis leurs inverses.

Point délicat : la borne $+\infty$ est exclue ; utilise la limite admise.

Exercice 4 4 pts

Un paramètre, puis une équation

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+m & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{4x+2}{x+1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1. 1 pts

Montrer que f est continue en 1 si et seulement si $m=0$.

INDICE

Outil : compare $f(1)$, la limite à gauche et la limite à droite en 1.

Point délicat : la limite à gauche vaut déjà $f(1)$.

2. 1 pts

On suppose désormais $m=0$. Montrer que f est strictement croissante sur $[-1;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

INDICE

Outil : sur $[-1;1]$, f coïncide avec $x\mapsto x^2+2x$, de dérivée $2x+2$.

Point délicat : l'expression $\dfrac{4x+2}{x+1}$ vaut aussi 3 en 1 ; elle décrit f sur tout $[1;+\infty[$.

3. 1 pts

Montrer que $f\left([-1;+\infty[\right)=[-1;4[$ (on admet que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$).

INDICE

Début : f est continue sur $[-1;+\infty[$ grâce à la question 1.

Ensuite : si $a<1<b$, compare $f(a)$, $f(1)$ et $f(b)$; calcule $f(-1)$.

4. 1 pts

Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution dans $[-1;+\infty[$, puis la calculer.

INDICE

Outil : 2 appartient à $[-1;4[$.

Ensuite : compare 2 et $f(1)$ pour savoir sur quel morceau se trouve la solution.

Exercice 5 4 pts

La réciproque d'un trinôme

Soit $I = [3; +\infty[$ et f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 11$$

1. 1 pts

Montrer que $f(x) = (x-3)^2 + 2$ pour tout x de I, puis que f est strictement croissante sur I.

INDICE

Outil : développe $(x-3)^2$.

Ensuite : étudie le signe de $f'(x) = 2x - 6$ sur $]3; +\infty[$.

2. 0,5 pts

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [2; +\infty[$.

INDICE

Outil : f est continue ; calcule $f(3)$ et utilise la limite de f en $+\infty$.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout y de J, $f^{-1}(y) = 3 + \sqrt{y-2}$.

INDICE

Début : résous $(x-3)^2 + 2 = y$ avec $x \geq 3$.

Point délicat : $x - 3 \geq 0$ fixe le signe de la racine.

4. 0,5 pts

Calculer $f^{-1}(6)$. En déduire un point de la courbe de f et un point de la courbe de f^{-1}, symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

INDICE

Outil : $f^{-1}(6) = a$ signifie $f(a) = 6$.

5. 1 pts

En utilisant la question 4, montrer que l'ensemble des réels x de I tels que $f(x) \leq 6$ est l'intervalle $[3; 5]$.

INDICE

Outil : f est strictement croissante sur I.

Point délicat : traite séparément $x \leq 5$ et $x > 5$.