BURHAN

# Continuité : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/continuite/exercices/examen

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Continuité | Niveau examen | 5 |

**Exercice 1** 4 pts

## Le signe d'une fonction auxiliaire

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

On admet que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

**1.** 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x$, $g'(x) = 6x(x-1)$, puis dresser le tableau de variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

**Outil :** dérive terme à terme, puis factorise par $6x$.

**Ensuite :** calcule $g(0)$ et $g(1)$.

CORRIGÉ

**Dérivée.** $g$ est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x^2 - 6x \\ &= 6x(x-1) \end{aligned}$$

**Signe.** Ce trinôme a pour racines $0$ et $1$. Il est strictement positif sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$, strictement négatif sur $]0;1[$.

**Valeurs du tableau.** $g(0) = -1$ et $g(1) = 2 - 3 - 1 = -2$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $g'(x) = 6x(x-1)$. La fonction $g$ est strictement croissante sur $]-\infty;0]$, de $-\infty$ à $-1$ ; strictement décroissante sur $[0;1]$, de $-1$ à $-2$ ; strictement croissante sur $[1;+\infty[$, de $-2$ à $+\infty$.

**2.** 0,5 pts

Montrer que $g(x) < 0$ pour tout $x$ de $]-\infty;1]$.

INDICE

**Outil :** lis le tableau : quelle est la plus grande valeur de $g$ sur $]-\infty;1]$ ?

CORRIGÉ

**Maximum sur $]-\infty;1]$.** D'après le tableau de variations, sur cet intervalle, $g$ croît jusqu'à $g(0) = -1$, puis décroît jusqu'à $g(1) = -2$. Sa plus grande valeur sur $]-\infty;1]$ est donc $g(0) = -1$.

**Conclusion.** Pour tout $x \leq 1$, $g(x) \leq -1 < 0$ : $g(x) < 0$ pour tout $x$ de $]-\infty;1]$.

**3.** 1,5 pts

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[1;2]$, puis que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.

INDICE

**Outil :** continuité et stricte monotonie de $g$ sur $[1;2]$, puis signes de $g(1)$ et $g(2)$.

**Ensuite :** calcule $g(1{,}6)$ et $g(1{,}7)$.

CORRIGÉ

**Hypothèses.**

- $g$ est continue sur $[1;2]$, car c'est un polynôme.
- $g$ est strictement croissante sur $[1;2]$ (question 1).
- $g(1) = -2 < 0$ et $g(2) = 16 - 12 - 1 = 3 > 0$.

**Unicité.** Par le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[1;2]$, située dans $]1;2[$.

**Encadrement.** On calcule :

- $g(1{,}6) = 8{,}192 - 7{,}68 - 1 = -0{,}488 < 0$ ;
- $g(1{,}7) = 9{,}826 - 8{,}67 - 1 = 0{,}156 > 0$.

Comme $g$ est continue sur $[1{,}6;1{,}7]$ et $g(1{,}6) \times g(1{,}7) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires (cas des signes contraires) donne une solution dans $]1{,}6;1{,}7[$. La solution étant unique dans $[1;2]$, c'est $\alpha$.

**Conclusion.** L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[1;2]$, et :

$$1{,}6 < \alpha < 1{,}7$$

**4.** 1 pts

En déduire que $g(x) < 0$ pour tout $x$ de $]-\infty;\alpha[$ et $g(x) > 0$ pour tout $x$ de $]\alpha;+\infty[$.

INDICE

**Début :** traite séparément $x \leq 1$, puis $x \geq 1$.

**Point délicat :** sur $[1;+\infty[$, utilise la stricte croissance de $g$ et $g(\alpha) = 0$.

CORRIGÉ

**Sur** $]-\infty;1]$**.** D'après la question 2, $g(x) < 0$.

**Sur** $[1;+\infty[$**.** $g$ est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$, avec $\alpha > 1$ :

- si $1 \leq x < \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha) = 0$ ;
- si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha) = 0$.

**Conclusion.** En réunissant les deux cas, $g(x) < 0$ pour tout $x$ de $]-\infty;\alpha[$, $g(\alpha) = 0$, et $g(x) > 0$ pour tout $x$ de $]\alpha;+\infty[$.

## Exercice 2 — 5 pts

### Demande, offre et prix d'équilibre

Un commerçant étudie un produit dont le prix unitaire $p$, en dirhams, varie dans $[0;25]$. Pour un prix $p$, la quantité demandée par les clients et la quantité proposée par les fournisseurs, en centaines d'unités, sont :

$$d(p)=\frac{300}{p+5}$$

$$s(p)=2p+4$$

Le prix d'équilibre est le prix pour lequel la quantité demandée est égale à la quantité proposée. Ces données sont fictives.

#### 1. — 1 pts

Montrer que $d$ est strictement décroissante sur $[0;25]$ et que $d([0;25])=[10;60]$.

INDICE

**Outil :** $d'(p)=-\dfrac{300}{(p+5)^2}$.

**Point délicat :** fonction décroissante, bornes échangées.

CORRIGÉ

**Variations.** Sur $[0;25]$, $p+5>0$ : la fonction rationnelle $d$ est continue et dérivable sur $[0;25]$. Pour tout $p$ de $[0;25]$ :

$$d'(p)=-\frac{300}{(p+5)^2}<0$$

Donc $d$ est strictement décroissante sur $[0;25]$.

**Bornes.** $d(0)=\dfrac{300}{5}=60$ et $d(25)=\dfrac{300}{30}=10$.

**Conclusion.** $d$ est continue et strictement décroissante : les images des bornes s'échangent, et $d([0;25])=[10;60]$.

**2.** 1,5 pts

Montrer que $d$ admet une fonction réciproque $d^{-1}$ définie sur $[10;60]$, et que $d^{-1}(q) = \dfrac{300}{q} - 5$ pour tout $q$ de $[10;60]$. Calculer $d^{-1}(25)$ et interpréter ce nombre.

INDICE

**Début :** résous $\dfrac{300}{p+5} = q$, d'inconnue $p$.

**Ensuite :** $d^{-1}(25)$ est un prix.

CORRIGÉ

**Existence.** $d$ est continue et strictement décroissante sur $[0;25]$ : elle admet une fonction réciproque $d^{-1}$, définie sur $d([0;25]) = [10;60]$.

**Expression.** Soit $q \in [10;60]$ et $p \in [0;25]$. Comme $p+5 > 0$ et $q > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{300}{p+5} = q &\Leftrightarrow p+5 = \frac{300}{q} \\ &\Leftrightarrow p = \frac{300}{q} - 5 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $q$ de $[10;60]$, $d^{-1}(q) = \dfrac{300}{q} - 5$.

**Calcul.** $d^{-1}(25) = 12 - 5 = 7$.

**Conclusion.** $d^{-1}(25) = 7$ : pour une demande de $25$ centaines d'unités, le prix doit être de $7$ dirhams.

**3.** 1 pts

On pose $h(p) = d(p) - s(p)$ pour $p$ dans $[0;25]$. Montrer que $h$ est strictement décroissante sur $[0;25]$.

INDICE

**Outil :** $h'(p) = d'(p) - 2$.

CORRIGÉ

**Dérivabilité.** $h$ est la différence de deux fonctions continues et dérivables sur $[0;25]$ : elle est continue et dérivable sur $[0;25]$.

**Signe de la dérivée.** Pour tout $p$ de $[0;25]$ :

$$h'(p) = -\frac{300}{(p+5)^2} - 2$$

C'est la somme de deux nombres strictement négatifs, donc $h'(p) < 0$.

**Conclusion.** $h$ est strictement décroissante sur $[0;25]$.

**4.** 1,5 pts

Montrer que l'équation $d(p) = s(p)$ admet une unique solution $p_e$ dans $[0;25]$, puis que $8 < p_e < 9$.

INDICE

**Début :** $d(p) = s(p)$ équivaut à $h(p) = 0$ ; calcule $h(0)$ et $h(25)$.

**Ensuite :** calcule $h(8)$ et $h(9)$ à la calculatrice.

CORRIGÉ

**Unicité.** $h(0) = 60 - 4 = 56 > 0$ et $h(25) = 10 - 54 = -44 < 0$. Comme $h$ est continue et strictement décroissante sur $[0;25]$, le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone, s'applique : l'équation $h(p) = 0$, c'est-à-dire $d(p) = s(p)$, a une unique solution $p_e$ dans $[0;25]$.

**Encadrement.** À la calculatrice :

- $h(8) = \dfrac{300}{13} - 20 \approx 3{,}08 > 0$ ;
- $h(9) = \dfrac{300}{14} - 22 \approx -0{,}57 < 0$.

La fonction $h$ est continue sur $[8;9]$ et $h(8) \times h(9) < 0$ : par le théorème des valeurs intermédiaires (cas des signes contraires), $h(p) = 0$ a une solution dans $]8;9[$. La solution étant unique dans $[0;25]$, c'est $p_e$.

**Conclusion.** L'équation $d(p) = s(p)$ a une unique solution $p_e$ dans $[0;25]$, et $8 < p_e < 9$ : le prix d'équilibre est compris entre $8$ et $9$ dirhams.

## Exercice 3 — 5 pts

### Un quotient avec une racine carrée

Soit $D = [-1;3[\cup]3;+\infty[$ et $f$ la fonction définie sur $D$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

#### 1. — 1 pts

Montrer que $f$ est continue sur $[-1;3[$ et sur $]3;+\infty[$.

INDICE

**Outil :** le numérateur contient une composée avec la racine carrée.

**Point délicat :** le dénominateur ne s'annule qu'en $3$.

CORRIGÉ

**Numérateur.** La fonction $x \mapsto x+1$ est continue sur $[-1;+\infty[$ et y prend des valeurs positives ou nulles. La racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$. Par composée, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[-1;+\infty[$ ; par différence, $x \mapsto \sqrt{x+1}-2$ aussi.

**Dénominateur.** La fonction $x \mapsto x-3$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en $3$ : elle n'est nulle ni sur $[-1;3[$, ni sur $]3;+\infty[$.

**Conclusion.** Par quotient, $f$ est continue sur $[-1;3[$ et sur $]3;+\infty[$.

**2.** 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \geq -1$, $\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right) = x-3$. En déduire que, pour tout $x$ de $D$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$.

INDICE

**Outil :** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, avec $a = \sqrt{x+1}$ et $b = 2$.

**Ensuite :** remplace $x-3$ par ce produit au dénominateur de $f(x)$.

CORRIGÉ

**Produit.** Soit $x \geq -1$. Avec l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\\&= \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2^2\\&= (x+1) - 4 = x-3\end{aligned}$$

**Simplification.** Soit $x \in D$. Alors $x-3 \neq 0$, donc les deux facteurs du produit sont non nuls. On note $s = \sqrt{x+1}$, on remplace $x-3$ par ce produit, puis on simplifie par $s-2$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{s-2}{(s-2)(s+2)}\\&= \frac{1}{s+2}\\&= \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x \geq -1$, $\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right) = x-3$, et pour tout $x$ de $D$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$.

**3.** 1 pts

Montrer que $f$ admet en $3$ une limite finie, égale à $\dfrac{1}{4}$.

INDICE

**Outil :** utilise l'écriture de la question 2.

**Point délicat :** la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ est continue en $3$.

CORRIGÉ

**Une fonction continue en $3$.** La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ est continue sur $[-1;+\infty[$ : c'est un quotient de fonctions continues, dont le dénominateur vaut au moins $2$. Elle coïncide avec $f$ sur $D$ (question 2).

**Limite.** Donc $\lim_{x\to 3} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

**Conclusion.** $f$ admet en $3$ une limite finie, égale à $\dfrac{1}{4}$.

**4.** 0,5 pts

En déduire que $f$ admet un prolongement par continuité $g$ en $3$, puis montrer que $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ pour tout $x$ de $[-1;+\infty[$.

INDICE

**Outil :** la limite trouvée est un réel.

**Ensuite :** compare $g(3)$ avec la valeur en $3$ de l'expression de la question 2.

CORRIGÉ

**Prolongement.** La limite de $f$ en $3$ est un réel : $f$ admet un prolongement par continuité $g$ en $3$. Il coïncide avec $f$ sur $D$ et $g(3) = \dfrac{1}{4}$.

**Expression sur $D$.** Pour $x \in D$, $g(x) = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ (question 2).

**Expression en $3$.** $\dfrac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \dfrac{1}{4} = g(3)$.

**Conclusion.** Pour tout $x$ de $[-1;+\infty[$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$.

**5.** 1,5 pts

Montrer que $g$ est strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$ et que $g\left([-1;+\infty[\right) = ]0;0{,}5]$ (on admet que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$).

INDICE

**Outil :** pour $-1 \leq a < b$, compare $\sqrt{a+1}+2$ et $\sqrt{b+1}+2$, puis leurs inverses.

**Point délicat :** la borne $+\infty$ est exclue ; utilise la limite admise.

CORRIGÉ

**Variations.** Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $-1 \leq a < b$. Alors $a+1 < b+1$, et la racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc :

$$0 < \sqrt{a+1}+2 < \sqrt{b+1}+2$$

Le passage à l'inverse de réels strictement positifs change le sens : $g(a) > g(b)$. Donc $g$ est strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$.

**Image.** $g$ est continue sur $[-1;+\infty[$ et $g(-1) = \dfrac{1}{0+2} = 0{,}5$. Comme $g$ est strictement décroissante et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, la valeur $0{,}5$ est atteinte et la borne $0$ ne l'est pas.

**Conclusion.** $g$ est strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$ et $g\left([-1;+\infty[\right) = ]0;0{,}5]$.

## Exercice 4 — 4 pts

### Un paramètre, puis une équation

Soit $m$ un réel et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + m & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{4x+2}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

#### 1. — 1 pts

Montrer que $f$ est continue en $1$ si et seulement si $m = 0$.

INDICE

**Outil :** compare $f(1)$, la limite à gauche et la limite à droite en $1$.

**Point délicat :** la limite à gauche vaut déjà $f(1)$.

CORRIGÉ

**Image.** Comme $1 \leq 1$, on utilise la première expression : $f(1) = 1 + 2 + m = 3 + m$.

**À gauche.** Pour $x \leq 1$, $f(x) = x^2 + 2x + m$, polynôme continu en $1$ : $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 + m = f(1)$. La fonction $f$ est continue à gauche en $1$ pour tout $m$.

**À droite.** Pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+1}$, fonction rationnelle continue en $1$ : $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{4+2}{1+1} = 3$.

**Conclusion.** $f$ est continue en $1$ si et seulement si $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, c'est-à-dire $3 + m = 3$, soit $m = 0$.

**2.** 1 pts

On suppose désormais $m = 0$. Montrer que $f$ est strictement croissante sur $[-1;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

INDICE

**Outil :** sur $[-1;1]$, $f$ coïncide avec $x \mapsto x^2 + 2x$, de dérivée $2x + 2$.

**Point délicat :** l'expression $\dfrac{4x+2}{x+1}$ vaut aussi $3$ en $1$ ; elle décrit $f$ sur tout $[1;+\infty[$.

CORRIGÉ

**Sur $[-1;1]$.** Avec $m = 0$, $f$ coïncide sur $[-1;1]$ avec le polynôme $P : x \mapsto x^2 + 2x$. Pour tout réel $x$, $P'(x) = 2x + 2$, et $P'(x) = 2x + 2 > 0$ sur $]-1;1[$. Donc $P$, et avec elle $f$, est strictement croissante sur $[-1;1]$.

**Sur $[1;+\infty[$.** L'expression $\dfrac{4x+2}{x+1}$ vaut $3 = f(1)$ en $1$. Ainsi $f$ coïncide sur $[1;+\infty[$ avec la fonction rationnelle $R : x \mapsto \dfrac{4x+2}{x+1}$, dérivable sur cet intervalle. Pour tout $x \geq 1$ :

$$\begin{aligned} R'(x) &= \frac{4(x+1) - (4x+2)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc $R$, et avec elle $f$, est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

**Conclusion.** $f$ est strictement croissante sur $[-1;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

**3.** 1 pts

Montrer que $f\left([-1;+\infty[\right) = [-1;4[$ (on admet que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$).

INDICE

**Début :** $f$ est continue sur $[-1;+\infty[$ grâce à la question 1.

**Ensuite :** si $a < 1 < b$, compare $f(a)$, $f(1)$ et $f(b)$ ; calcule $f(-1)$.

CORRIGÉ

**Continuité.** Avec $m = 0$, $f$ est continue en $1$ (question 1), sur $[-1;1[$ (polynôme) et sur $]1;+\infty[$ (fonction rationnelle, $x + 1 \neq 0$). Donc $f$ est continue sur $[-1;+\infty[$.

**Monotonie.** Soit $-1 \leq a < b$. Si $a$ et $b$ sont du même côté de $1$, la question 2 donne $f(a) < f(b)$. Si $a < 1 < b$, elle donne $f(a) < f(1) < f(b)$. Ainsi $f$ est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.

**Image.** $f(-1) = 1 - 2 = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$. La valeur $-1$ est atteinte, la borne $4$ ne l'est pas.

**Conclusion.** $f$ est continue et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, donc $f\left([-1;+\infty[\right) = [-1;4[$.

**4.** 1 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-1; +\infty[$, puis la calculer.

INDICE

**Outil :** $2$ appartient à $[-1; 4[$.

**Ensuite :** compare $2$ et $f(1)$ pour savoir sur quel morceau se trouve la solution.

CORRIGÉ

**Unicité.** $f$ est continue et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$, et $2$ appartient à $f\left([-1; +\infty[\right) = [-1; 4[$ : l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution dans cet intervalle.

**Morceau concerné.** Pour $x > 1$, $f(x) > f(1) = 3 > 2$ : la solution est dans $[-1; 1]$, où $f(x) = x^2 + 2x$. On résout donc $x^2 + 2x - 2 = 0$.

**Calcul.** Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 8 = 12$, et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Les racines sont :

$$x_1 = -1 - \sqrt{3}$$
$$x_2 = -1 + \sqrt{3}$$

Seule $x_2 = -1 + \sqrt{3} \approx 0{,}73$ appartient à $[-1; 1]$.

**Conclusion.** L'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-1; +\infty[$ : c'est $-1 + \sqrt{3}$, avec $-1 + \sqrt{3} \approx 0{,}73$.

**Exercice 5** 4 pts

## La réciproque d'un trinôme

Soit $I = [3; +\infty[$ et $f$ la fonction définie sur $I$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 11$$

**1.** 1 pts

Montrer que $f(x) = (x-3)^2 + 2$ pour tout $x$ de $I$, puis que $f$ est strictement croissante sur $I$.

INDICE

**Outil :** développe $(x-3)^2$.

**Ensuite :** étudie le signe de $f'(x) = 2x - 6$ sur $]3; +\infty[$.

CORRIGÉ

**Forme.** Soit $x \in I$ :

$$\begin{aligned}&(x-3)^2 + 2\\ &= x^2 - 6x + 9 + 2\\ &= x^2 - 6x + 11 = f(x)\end{aligned}$$

**Variations.** $f$ est un polynôme, continu et dérivable sur $I$. Pour tout $x$ de $I$, $f'(x) = 2x - 6 = 2(x-3)$, et $2(x-3) > 0$ pour $x > 3$. Donc $f$ est strictement croissante sur $I$.

**Conclusion.** Pour tout $x$ de $I$, $f(x) = (x-3)^2 + 2$, et $f$ est strictement croissante sur $I$.

**2.** 0,5 pts

Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $J = [2; +\infty[$.

INDICE

**Outil :** $f$ est continue ; calcule $f(3)$ et utilise la limite de $f$ en $+\infty$.

CORRIGÉ

**Hypothèses.** $f$ est continue (polynôme) et strictement croissante sur $I$ (question 1).

**Image.** $f(3) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La valeur $2$ est atteinte, $+\infty$ ne l'est pas, donc $f(I) = [2; +\infty[ = J$.

**Conclusion.** $f$ est continue et strictement croissante sur $I$ : elle admet une fonction réciproque $f^{-1}$, définie sur $f(I) = J$.

**3.** 1 pts

Montrer que, pour tout $y$ de $J$, $f^{-1}(y) = 3 + \sqrt{y-2}$.

INDICE

**Début :** résous $(x-3)^2 + 2 = y$ avec $x \geq 3$.

**Point délicat :** $x - 3 \geq 0$ fixe le signe de la racine.

CORRIGÉ

**Équation.** Soit $y \geq 2$ et $x \geq 3$. D'après la question 1 :

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x-3)^2 = y - 2$$

**Racine positive.** Comme $x - 3 \geq 0$ et $y - 2 \geq 0$, l'égalité $(x-3)^2 = y - 2$ équivaut à $x - 3 = \sqrt{y-2}$, soit $x = 3 + \sqrt{y-2}$.

**Conclusion.** Pour tout $y$ de $J$, $f^{-1}(y) = 3 + \sqrt{y-2}$.

**4.** 0,5 pts

Calculer $f^{-1}(6)$. En déduire un point de la courbe de $f$ et un point de la courbe de $f^{-1}$, symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

INDICE

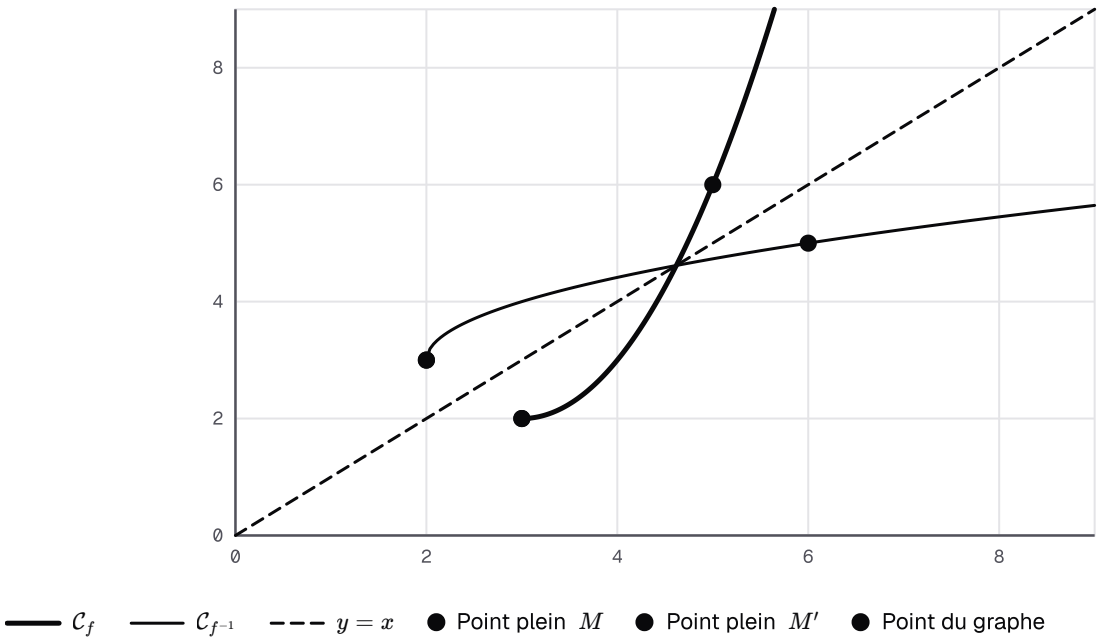
**Outil :** $f^{-1}(6) = a$ signifie $f(a) = 6$.

CORRIGÉ

**Calcul.** $f^{-1}(6) = 3 + \sqrt{4} = 5$.

**Vérification.** $f(5) = 25 - 30 + 11 = 6$.

**Conclusion.** $f^{-1}(6) = 5$. Le point $(5; 6)$ est sur la courbe de $f$ et le point $(6; 5)$ sur celle de $f^{-1}$ : ils sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.




**La courbe de f sur [3 ; +∞[ et celle de f⁻¹ sur [2 ; +∞[ : le point (5 ; 6) de la première et le point (6 ; 5) de la seconde sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.**

**5.** 1 pts

En utilisant la question 4, montrer que l'ensemble des réels $x$ de $I$ tels que $f(x) \leq 6$ est l'intervalle $[3;5]$.

INDICE

**Outil :** $f$ est strictement croissante sur $I$.

**Point délicat :** traite séparément $x \leq 5$ et $x > 5$.

CORRIGÉ

Soit $x \in I$. D'après la question 4, $f(5) = 6$, et $f$ est strictement croissante sur $I$ :

- si $3 \leq x \leq 5$, alors $f(x) \leq f(5)$, c'est-à-dire $f(x) \leq 6$ ;
- si $x > 5$, alors $f(x) > f(5)$, c'est-à-dire $f(x) > 6$.

Donc, pour $x$ dans $I$, $f(x) \leq 6$ si et seulement si $3 \leq x \leq 5$.

**Conclusion.** L'ensemble des réels $x$ de $I$ tels que $f(x) \leq 6$ est l'intervalle $[3;5]$.