BURHAN

Continuité : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/continuite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Entraînement	7

Exercice 1

Un tarif de location sans saut

Une agence loue un matériel. Le prix à payer, en dirhams, pour une durée de t jours est donné par :

$$C(t) = \begin{cases} 40t & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 30t + m & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

où m est un réel. Ces données sont fictives.

1.

Calculer $C(3)$, puis $\lim_{t \to 3^+} C(t)$ en fonction de m.

INDICE

Outil : $C(3)$ se calcule avec la première expression, la limite à droite avec la seconde.

2.

Déterminer m pour que C soit continue en 3.

INDICE

Début : à gauche de 3, $C(t) = 40t$; la continuité à gauche est acquise.

Ensuite : écris l'égalité entre la limite à droite et $C(3)$.

3.

Avec cette valeur de m, calculer le prix d'une location de 5 jours, puis le prix moyen par jour.

INDICE

Outil : $5 > 3$: utilise la seconde expression.

Exercice 2

Prolonger en un point, mais pas en l'autre

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

1.

Factoriser le numérateur et le dénominateur, puis simplifier $f(x)$ pour x dans $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

INDICE

Outil : 2 annule le numérateur ; le dénominateur est une différence de deux carrés.

2.

Montrer que f admet un prolongement par continuité en 2, et le préciser.

INDICE

Début : calcule la limite en 2 avec l'écriture simplifiée.

Point délicat : cette limite doit être un réel.

3.

La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en -2 ?

INDICE

Outil : regarde le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{x-3}{x+2}$ près de -2.

Point délicat : une limite infinie interdit tout prolongement.

Exercice 3

Images d'intervalles à partir d'un tableau de variations

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x + 5$$

On admet que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1.

Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : factorise $f'(x) = 3x^2 - 12$.

Ensuite : calcule $f(-2)$ et $f(2)$.

2.

Déterminer $f([-2;2])$, puis $f\left([2;+\infty[\right)$.

INDICE

Outil : sur chacun de ces intervalles, f est continue et strictement monotone.

Point délicat : la borne $+\infty$ est exclue ; utilise la limite.

3.

En déduire $f([-3;4])$.

INDICE

Début : découpe $[-3;4]$ en trois intervalles où f est monotone.

Ensuite : réunis les trois images.

Exercice 4

Une racine carrée dans un quotient

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x+1}$$

1.

Déterminer l'ensemble de définition D de f.

INDICE

Outil : deux conditions : le nombre sous la racine est positif ou nul, le dénominateur n'est pas nul.

2.

Montrer que f est continue sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;4]$.

INDICE

Début : $x \mapsto \sqrt{4-x}$ est la composée de $u : x \mapsto 4-x$, suivie de la racine carrée.

Point délicat : vérifie que u prend ses valeurs dans $[0;+\infty[$, puis que le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.

3.

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[0;3]$.

INDICE

Outil : le segment $[0;3]$ est inclus dans l'un des intervalles de la question 2.

Ensuite : calcule $f(0)$ et $f(3)$.

Exercice 5

Un signe obtenu grâce à une solution

Soit g et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 + 3x - 1$$

$$F(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{3x^2}{2} - x$$

1.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $0 < \alpha < 1$.

INDICE

Outil : $g'(x) = 6x^2 + 3$.

Ensuite : calcule $g(0)$ et $g(1)$.

Point délicat : pour $x \neq \alpha$, la stricte croissance empêche $g(x)$ d'être égal à $g(\alpha)$.

2.

En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

INDICE

Outil : compare x à α et utilise le sens de variation de g.

3.

Vérifier que $F'(x) = g(x)$, puis en déduire le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : dérive chaque terme de $F(x)$.

Ensuite : le signe de $F'(x)$ est celui de $g(x)$, connu par la question 2.

Exercice 6

Une réciproque et sa courbe

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 5$$

1.

Montrer que f est continue et strictement croissante sur I, puis déterminer $J = f(I)$.

INDICE

Outil : le signe de $f'(x) = 2x$ sur $]0; +\infty[$.

Point délicat : la borne 0 appartient à I, la borne $+\infty$ non.

2.

En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J, puis montrer que $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 5}$ pour tout y de J.

INDICE

Début : résous $x^2 + 5 = y$, d'inconnue x.

Point délicat : garde la solution qui appartient à I.

3.

Donner le sens de variation de f^{-1}. Calculer $f(2)$ et $f^{-1}(9)$, puis expliquer comment tracer la courbe de f^{-1} à partir de celle de f.

INDICE

Outil : f^{-1} a le même sens de variation que f.

Ensuite : pense à une symétrie par rapport à une droite bien choisie.

Exercice 7

Le seuil de rentabilité d'un atelier

Un atelier fabrique q centaines d'objets par semaine, avec q dans $[0;4]$. Son bénéfice, en milliers de dirhams, vaut :

$$B(q) = -q^3 + 6q^2 - 4$$

Ces données sont fictives.

1.

Étudier le sens de variation de B sur $[0;4]$, puis déterminer $B([0;4])$.

INDICE

Outil : factorise $B'(q) = -3q^2 + 12q$.

Point délicat : $B'(q)$ ne s'annule qu'en 0 et en 4.

2.

Montrer qu'il existe une unique production q_0 de $[0;4]$ pour laquelle le bénéfice est nul, et que q_0 appartient à $]0;1[$.

INDICE

Outil : 0 appartient à $B([0;4])$.

Ensuite : calcule $B(1)$.

3.

Montrer que $0{,}8 < q_0 < 0{,}9$, puis interpréter ce résultat.

INDICE

Début : calcule $B(0{,}8)$ et $B(0{,}9)$ à la calculatrice.

Point délicat : q compte des centaines d'objets.