BURHAN

Continuité : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/continuite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Entraînement	7

Exercice 1

Un tarif de location sans saut

Une agence loue un matériel. Le prix à payer, en dirhams, pour une durée de t jours est donné par :

$$C(t) = \begin{cases} 40t & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 30t + m & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

où m est un réel. Ces données sont fictives.

1.

Calculer $C(3)$, puis $\lim_{t \to 3^+} C(t)$ en fonction de m.

INDICE

Outil : $C(3)$ se calcule avec la première expression, la limite à droite avec la seconde.

CORRIGÉ

Image. Comme $0 \leq 3 \leq 3$, on utilise la première expression : $C(3) = 40 \times 3 = 120$.

Limite à droite. Pour $t > 3$, $C(t) = 30t + m$, expression affine en t, continue en 3. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 3^+} C(t) &= 30 \times 3 + m \\ &= 90 + m \end{aligned}$$

Conclusion. $C(3) = 120$ et $\lim_{t \to 3^+} C(t) = 90 + m$.

2.

Déterminer m pour que C soit continue en 3.

INDICE

Début : à gauche de 3, $C(t) = 40t$; la continuité à gauche est acquise.

Ensuite : écris l'égalité entre la limite à droite et $C(3)$.

CORRIGÉ

À gauche. Pour $0 \leq t \leq 3$, $C(t) = 40t$, donc $\lim_{t \to 3^-} C(t) = 120 = C(3)$: C est continue à gauche en 3, quel que soit m.

À droite. C est continue à droite en 3 si et seulement si $\lim_{t \to 3^+} C(t) = C(3)$, c'est-à-dire :

$$90 + m = 120$$

soit $m = 30$.

Conclusion. C est continue en 3 si et seulement si elle l'est à gauche et à droite, c'est-à-dire pour $m = 30$. Le tarif ne fait alors aucun saut.

3.

Avec cette valeur de m, calculer le prix d'une location de 5 jours, puis le prix moyen par jour.

INDICE

Outil : $5 > 3$: utilise la seconde expression.

CORRIGÉ

Prix de 5 jours. Comme $5 > 3$, on utilise la seconde expression, avec $m = 30$: $C(5) = 30 \times 5 + 30 = 180$.

Prix moyen. On divise par le nombre de jours : $\dfrac{180}{5} = 36$.

Conclusion. Une location de 5 jours coûte 180 dirhams, soit 36 dirhams par jour en moyenne, contre 40 dirhams par jour pour une location de 3 jours au plus.

Exercice 2

Prolonger en un point, mais pas en l'autre

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

1.

Factoriser le numérateur et le dénominateur, puis simplifier $f(x)$ pour x dans $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

INDICE

Outil : 2 annule le numérateur ; le dénominateur est une différence de deux carrés.

CORRIGÉ

Numérateur. 2 annule $x^2 - 5x + 6$ et le produit des racines vaut 6 : l'autre racine est 3. Pour tout réel x, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Dénominateur. C'est une différence de deux carrés : pour tout réel x, $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Simplification. Soit x dans $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Alors $x - 2 \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{x - 3}{x + 2} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 2}$.

2.

Montrer que f admet un prolongement par continuité en 2, et le préciser.

INDICE

Début : calcule la limite en 2 avec l'écriture simplifiée.

Point délicat : cette limite doit être un réel.

CORRIGÉ

Limite. Près de 2, $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 2}$, et cette fonction rationnelle est continue en 2. Donc $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{x + 2} = \dfrac{-1}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

Prolongement. La limite en 2 est un réel : f admet un prolongement par continuité en 2. C'est la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 3}{x + 2} & \text{si } x \neq 2 \\ -\dfrac{1}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Conclusion. f admet en 2 un prolongement par continuité g, avec $g(2) = -\dfrac{1}{4}$. Comme l'expression $\dfrac{x - 3}{x + 2}$ vaut $-\dfrac{1}{4}$ en 2, on a aussi $g(x) = \dfrac{x - 3}{x + 2}$ pour tout $x \neq -2$.

3.

La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en -2 ?

INDICE

Outil : regarde le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{x-3}{x+2}$ près de -2.

Point délicat : une limite infinie interdit tout prolongement.

CORRIGÉ

Limites en -2. Quand x tend vers -2, le numérateur $x-3$ tend vers -5 et le dénominateur $x+2$ tend vers 0 :

- à droite de -2, $x+2>0$, donc $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$;
- à gauche de -2, $x+2<0$, donc $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$.

Conclusion. La limite de f en -2 n'est pas un réel : f n'admet pas de prolongement par continuité en -2.

Exercice 3

Images d'intervalles à partir d'un tableau de variations

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x + 5$$

On admet que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1.

Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : factorise $f'(x) = 3x^2 - 12$.

Ensuite : calcule $f(-2)$ et $f(2)$.

CORRIGÉ

Dérivée. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme a pour racines -2 et 2. Il est strictement positif sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]2 ; +\infty[$, strictement négatif sur $]-2 ; 2[$.

Valeurs du tableau.

$$\begin{aligned} f(-2) &= -8 + 24 + 5 = 21 \\ f(2) &= 8 - 24 + 5 = -11 \end{aligned}$$

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty ; -2]$, strictement décroissante sur $[-2 ; 2]$, puis strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$. Elle passe de $-\infty$ à 21, redescend à -11, puis tend vers $+\infty$.

2.

Déterminer $f([-2 ; 2])$, puis $f\left([2 ; +\infty[\right)$.

INDICE

Outil : sur chacun de ces intervalles, f est continue et strictement monotone.

Point délicat : la borne $+\infty$ est exclue ; utilise la limite.

CORRIGÉ

Sur $[-2 ; 2]$. f est continue et strictement décroissante : les images des bornes s'échangent.

$$\begin{aligned} f([-2 ; 2]) &= [f(2) ; f(-2)] \\ &= [-11 ; 21] \end{aligned}$$

Sur $[2 ; +\infty[$. f est continue et strictement croissante, $f(2) = -11$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La borne -11 est atteinte, $+\infty$ ne l'est pas.

Conclusion. $f([-2 ; 2]) = [-11 ; 21]$ et $f\left([2 ; +\infty[\right) = [-11 ; +\infty[$.

3.

En déduire $f([-3;4])$.

INDICE

Début : découpe $[-3;4]$ en trois intervalles où f est monotone.

Ensuite : réunis les trois images.

CORRIGÉ

Valeurs aux bornes. $f(-3) = -27 + 36 + 5 = 14$ et $f(4) = 64 - 48 + 5 = 21$.

Découpage. f est continue sur $[-3;4]$ et :

- sur $[-3;-2]$, f croît : l'image est $[14;21]$;
- sur $[-2;2]$, l'image est $[-11;21]$ (question 2) ;
- sur $[2;4]$, f croît : l'image est $[-11;21]$.

Réunion. L'image de $[-3;4]$ est la réunion des trois images :

$$\begin{aligned}&[14;21] \cup [-11;21]\\ &\quad \cup [-11;21]\\ &= [-11;21]\end{aligned}$$

Conclusion. $f([-3;4]) = [-11;21]$.

Exercice 4

Une racine carrée dans un quotient

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x+1}$$

1.

Déterminer l'ensemble de définition D de f.

INDICE

Outil : deux conditions : le nombre sous la racine est positif ou nul, le dénominateur n'est pas nul.

CORRIGÉ

Conditions. $f(x)$ existe si et seulement si $4-x \geq 0$ et $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \leq 4$ et $x \neq -1$.

Conclusion. L'ensemble de définition de f est :

$$D =]-\infty; -1[\cup]-1; 4]$$

2.

Montrer que f est continue sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; 4]$.

INDICE

Début : $x \mapsto \sqrt{4-x}$ est la composée de $u : x \mapsto 4-x$, suivie de la racine carrée.

Point délicat : vérifie que u prend ses valeurs dans $[0; +\infty[$, puis que le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.

CORRIGÉ

Numérateur. La fonction $u : x \mapsto 4-x$ est un polynôme, continu sur $]-\infty; 4]$. Pour $x \leq 4$, on a $4-x \geq 0$, donc :

$$u\left(]-\infty; 4]\right) \subset [0; +\infty[$$

La racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$. Par composée, $x \mapsto \sqrt{4-x}$ est continue sur $]-\infty; 4]$.

Dénominateur. La fonction $x \mapsto x+1$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule qu'en -1. Elle n'est donc jamais nulle sur $]-\infty; -1[$, ni sur $]-1; 4]$.

Quotient. Par quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas, f est continue sur chacun de ces deux intervalles.

Conclusion. f est continue sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; 4]$.

3.

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[0; 3]$.

INDICE

Outil : le segment $[0; 3]$ est inclus dans l'un des intervalles de la question 2.

Ensuite : calcule $f(0)$ et $f(3)$.

CORRIGÉ

Continuité. $[0; 3] \subset]-1; 4]$: d'après la question 2, f est continue sur $[0; 3]$.

Images des bornes. $f(0) = \dfrac{\sqrt{4}}{1} = 2$ et $f(3) = \dfrac{\sqrt{1}}{4} = \dfrac{1}{4}$. Le réel 1 est compris entre ces deux images :

$$\frac{1}{4} \leq 1 \leq 2$$

Conclusion. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[0; 3]$.

Exercice 5

Un signe obtenu grâce à une solution

Soit g et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 + 3x - 1$$

$$F(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{3x^2}{2} - x$$

1.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $0 < \alpha < 1$.

INDICE

Outil : $g'(x) = 6x^2 + 3$.

Ensuite : calcule $g(0)$ et $g(1)$.

Point délicat : pour $x \neq \alpha$, la stricte croissance empêche $g(x)$ d'être égal à $g(\alpha)$.

CORRIGÉ

Monotonie. g est un polynôme, continu et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $g'(x) = 6x^2 + 3 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Existence. g est continue sur $[0;1]$, avec $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = 2 + 3 - 1 = 4 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires, cas des signes contraires ($g(0) \times g(1) < 0$), donne une solution α dans $]0;1[$.

Unicité. Soit x un réel. Si $x < \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha) = 0$; si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha) = 0$. Aucun autre réel que α n'annule g.

Conclusion. L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $0 < \alpha < 1$.

2.

En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

INDICE

Outil : compare x à α et utilise le sens de variation de g.

CORRIGÉ

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\alpha) = 0$ (question 1). Soit x un réel :

- si $x < \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha)$, c'est-à-dire $g(x) < 0$;
- si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha)$, c'est-à-dire $g(x) > 0$.

Conclusion. $g(x) < 0$ sur $]-\infty;\alpha[$, $g(\alpha) = 0$, et $g(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.

3.

Vérifier que $F'(x) = g(x)$, puis en déduire le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : dérive chaque terme de $F(x)$.

Ensuite : le signe de $F'(x)$ est celui de $g(x)$, connu par la question 2.

CORRIGÉ

Dérivée. F est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{4x^3}{2} + \frac{6x}{2} - 1 \\ &= 2x^3 + 3x - 1 = g(x) \end{aligned}$$

Signe. D'après la question 2, $F'(x) < 0$ sur $]-\infty;\alpha[$ et $F'(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.

Conclusion. Pour tout réel x, $F'(x) = g(x)$. F est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$: son minimum sur $\mathbb{R}$ est atteint en α.

Exercice 6

Une réciproque et sa courbe

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 5$$

1.

Montrer que f est continue et strictement croissante sur I, puis déterminer $J = f(I)$.

INDICE

Outil : le signe de $f'(x) = 2x$ sur $]0; +\infty[$.

Point délicat : la borne 0 appartient à I, la borne $+\infty$ non.

CORRIGÉ

Variations. f est un polynôme, continu et dérivable sur I. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x > 0$: f est strictement croissante sur I.

Image. f est continue et strictement croissante sur I, avec $f(0) = 5$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La borne 5 est atteinte, $+\infty$ ne l'est pas.

Conclusion. f est continue et strictement croissante sur I, et $J = f(I) = [5; +\infty[$.

2.

En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J, puis montrer que $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 5}$ pour tout y de J.

INDICE

Début : résous $x^2 + 5 = y$, d'inconnue x.

Point délicat : garde la solution qui appartient à I.

CORRIGÉ

Existence. f est continue et strictement croissante sur I : elle admet une fonction réciproque f^{-1}, définie sur $J = [5; +\infty[$.

Équation. Soit $y \geq 5$. On cherche $x \in I$ tel que $f(x) = y$:

$$x^2 + 5 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 5$$

Comme $y - 5 \geq 0$, les solutions réelles sont $\sqrt{y - 5}$ et $-\sqrt{y - 5}$. Seule la première est positive ou nulle, donc dans I.

Conclusion. Pour tout y de J, $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 5}$.

3.

Donner le sens de variation de f^{-1}. Calculer $f(2)$ et $f^{-1}(9)$, puis expliquer comment tracer la courbe de f^{-1} à partir de celle de f.

INDICE

Outil : f^{-1} a le même sens de variation que f.

Ensuite : pense à une symétrie par rapport à une droite bien choisie.

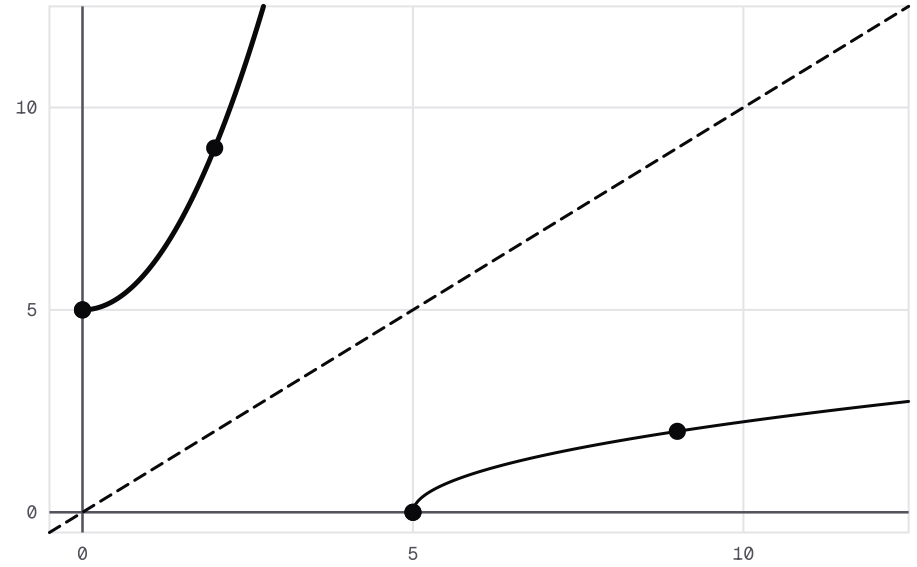
CORRIGÉ

Variations. Une fonction continue et strictement croissante a une réciproque strictement croissante : f^{-1} est strictement croissante sur J.

Points. $f(2) = 4 + 5 = 9$ et $f^{-1}(9) = \sqrt{4} = 2$. Le point $(2; 9)$ est sur la courbe de f, le point $(9; 2)$ sur celle de f^{-1}.

Courbe. Dans un repère orthonormé, la courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. Elle part du point $(5; 0)$ et monte vers la droite.

Conclusion. f^{-1} est strictement croissante sur J, $f(2) = 9$ et $f^{-1}(9) = 2$. On trace la courbe de f^{-1} par symétrie de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.



La courbe de f : x ↦ x² + 5 sur [0 ; +∞[et celle de f⁻¹ : y ↦ √(y − 5), symétriques par rapport à la droite d'équation y = x ; les points (2 ; 9) et (9 ; 2) se correspondent.

Exercice 7

Le seuil de rentabilité d'un atelier

Un atelier fabrique q centaines d'objets par semaine, avec q dans $[0;4]$. Son bénéfice, en milliers de dirhams, vaut :

$$B(q) = -q^3 + 6q^2 - 4$$

Ces données sont fictives.

1.

Étudier le sens de variation de B sur $[0;4]$, puis déterminer $B([0;4])$.

INDICE

Outil : factorise $B'(q) = -3q^2 + 12q$.

Point délicat : $B'(q)$ ne s'annule qu'en 0 et en 4.

CORRIGÉ

Dérivée. B est un polynôme, continu et dérivable sur $[0;4]$. Pour tout q de $[0;4]$, $B'(q) = -3q^2 + 12q = 3q(4-q)$.

Signe. Sur $]0;4[$, $3q > 0$ et $4 - q > 0$, donc $B'(q) > 0$: B est strictement croissante sur $[0;4]$.

Bornes.

$$B(0) = -4$$
$$B(4) = -64 + 96 - 4 = 28$$

Conclusion. B est continue et strictement croissante sur $[0;4]$, donc $B([0;4]) = [-4;28]$.

2.

Montrer qu'il existe une unique production q_0 de $[0;4]$ pour laquelle le bénéfice est nul, et que q_0 appartient à $]0;1[$.

INDICE

Outil : 0 appartient à $B([0;4])$.

Ensuite : calcule $B(1)$.

CORRIGÉ

Unicité. B est continue et strictement croissante sur $[0;4]$, et 0 appartient à $B([0;4]) = [-4;28]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone, l'équation $B(q) = 0$ a une unique solution q_0 dans $[0;4]$.

Position. $B(0) = -4 < 0$ et $B(1) = -1 + 6 - 4 = 1 > 0$. Comme B est continue sur $[0;1]$, le théorème des valeurs intermédiaires donne une solution dans $]0;1[$; par unicité, c'est q_0.

Conclusion. Il existe une unique production q_0 de $[0;4]$ pour laquelle le bénéfice est nul, et $q_0 \in]0;1[$.

3.

Montrer que $0{,}8 < q_0 < 0{,}9$, puis interpréter ce résultat.

INDICE

Début : calcule $B(0{,}8)$ et $B(0{,}9)$ à la calculatrice.

Point délicat : q compte des centaines d'objets.

CORRIGÉ

Images. $B(0{,}8) = -0{,}512 + 3{,}84 - 4 = -0{,}672 < 0$ et $B(0{,}9) = -0{,}729 + 4{,}86 - 4 = 0{,}131 > 0$.

Encadrement. B est continue sur $[0{,}8\,;\,0{,}9]$ et $B(0{,}8) \times B(0{,}9) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires (cas des signes contraires) montre que B s'annule au moins une fois dans $]0{,}8\,;\,0{,}9[$. La solution étant unique dans $[0\,;\,4]$, c'est q_0 :

$$0{,}8 < q_0 < 0{,}9$$

Interprétation. q compte des centaines d'objets : le seuil de rentabilité se situe entre 80 et 90 objets par semaine. En dessous de q_0, l'atelier perd de l'argent ; au-dessus, comme B est strictement croissante, son bénéfice est strictement positif.

Conclusion. $0{,}8 < q_0 < 0{,}9$: l'atelier devient rentable entre 80 et 90 objets fabriqués par semaine.